Actas de las VII Jornadas de Investigación en Filosofía para profesores, graduados y alumnos

10, 11 y 12 DE NOVIEMBRE DE 2008

Departamento de Filosofía
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad Nacional de La Plata
ISBN 978-950-34-0578-9

Teorías acerca de la implicación lógica en las primeras décadas del siglo XX.

Carlos A. Oller
Departamento de Filosofía
UBA - UNLP

1. Introducción: Quine y su interpretación de la teoría de la implicación lógica de Russell

En las primeras décadas del siglo XX varios autores desarrollaron teorías acerca de la implicación lógica en las que esta relación era tratada como un operador que se agregaba a las conectivas del lenguaje de la lógica proposicional y para el cual se proporcionaban leyes y reglas que pretendían capturar las propiedades de la consecuencia lógica. La más conocida de estas teorías es, quizás, la de la implicación estricta de Clarence I. Lewis, que este desarrolló como una alternativa a la teoría de la implicación lógica de Russell. A su vez, la insatisfacción con la teoría de Lewis motivo a lógicos como W. T. Parry y E. J. Nelson a presentar sus propias teorías de la implicación lógica.

Una interpretación particularmente influyente de esas teorías es la propuesta por Quine en su artículo “Reply to Professor Marcus”[1]. Allí Quine sostiene que la lógica modal nació en pecado: el pecado de confundir uso con mención, ya que cuando se afirma que una oración implica lógicamente a otra, estas oraciones no están siendo usadas sino mencionadas. Lewis se vio obligado a construir su teoría de la implicación estricta como reacción a la teoría de Russell que confundió la implicación material con la implicación lógica. Sin embargo, según

[1] W. v. O. Quine, (1961), “Reply to Professor Marcus”, Synthese, XIII, pp. 323-330.

la interpretación de Quine, Lewis persistió en el error de Russell y confundió la implicación estricta con la implicación lógica.

La interpretación de Quine tiene su antecedente en un pasaje de *The Logical Syntax of Language*[2] en el que Carnap se lamenta que Russell use el término "implicación" para designar a una conectiva y se pregunta si esta elección fue una consecuencia de confudir la implicación con la relación de consecuencia lógica.

En este trabajo examinaremos la interpretación quineana, evaluaremos su fidelidad a los textos, y nos uniremos a unos pocos autores —como D. Sanford[3] y S. Barker[4] — que proponen una visión menos hostil de la teoría russelliana de la implicación lógica y, como consecuencia, de las teorías que se oponen a ella pero que adoptan la misma estrategia criticada por Quine.

2. La teoría de la implicación lógica de Russell

Bertrand Russell desarrolla una teoría de la implicación lógica en su extenso artículo de 1906 "The Theory of Implication"[5]. Allí Russell sostiene que para que una proposición pueda ser inferida deductivamente de otra debe existir una relación entre ellas que haga que la segunda sea consecuencia lógica de la primera: a esta relación la llama Russell "implicación". De manera que la relación de implicación se da entre dos proposiciones p y q cuando la proposición q es una consecuencia de q, es decir cuando q puede ser inferida deductivamente

[2] R. Carnap, (1937), *The Logical Syntax of Language*, New York, Harcourt Brace, p. 255.

[3] David Sanford, (1989), *If P, then Q. Conditionals and the Foundations of Reasoning*, London & New York, Routledge.

[4] Stephen Barker, (2006), "Lewis on Implication", *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 42, pp. 10-16.

[5] Bertrand Russell, (1909), "The Theory of Implication", *American Journal of Mathematics*, 28, pp. 159-202. Este artículo es poco citado en las historias de la lógica y en los textos de filosofía de la lógica, aunque es importante para comprender la teoría de la consecuencia lógica de Russell y evaluar las críticas de Quine.

.

de *p*. La deducción depende, pues, de la relación de implicación; por ello, afirma Russell que todo sistema deductivo debe contener entre sus premisas las propiedades de la implicación necesarias para justificar la deducción.

La propiedad esencial que Russell pide de la relación de implicación es que lo implicado por una proposición verdadera sea verdadero, ya que sostiene que es en virtud de esta propiedad que la implicación da origen a demostraciones. Russell elige a la herradura para representar esta relación:

> Hence, "*p* implies *q*" will be a relation which holds between any two entities *p* and *q* unless *p* is true and *q* is not true, *i. e.* whenever either *p* is not true or *q* is true. The proposition "*p* implies *q*" is equivalent to "if *p* is true, then *q* is true", *i. e.* "'*p* is true' implies '*q* is true'"; it is also equivalent to "if *q* is false, *p* is false". When *p* is in fact true, "implies" may be replaced by "therefore", *i. e.* in place of "*p* implies *q*" we may say "*p* is true; therefore *q* is true". For "implies" we use the symbol "⊃", thus
>
> "$p \supset q$" means "*p* implies *q*"
>
> "$p. \supset .q \supset r$" means "p implies that q implies r", etc.[6]

Este pasaje, como señala Sanford[7], muestra que Russell no confunde uso con mención: son los nombres de las proposiciones, y no las proposiciones mismas, las que pueden completar adecuadamente el esquema oracional '___ es verdadero'. En el mismo texto es posible encontrar otros pasajes que parecen desmentir la acusación de Quine que atribuye a Russell el no ser conciente de la diferencia entre usar y mencionar una oración. En efecto, Russell distingue claramente la aseveración de la mera consideración de una proposición:

> Any proposition may be asserted or merely considered. If I say "Caesar died", I assert the proposition "Caesar died". If I say "´Caesar died` is a proposition" I make a different assertion, and Caesar died is no longer asserted but merely considered. Similarly in a hypothetical proposition, *e. g.* "if a=b, then b=a", we have two unasserted propositions, namely "a=b" and "b=a" while what is asserted is that the first of these implies the second.[8]

Como se dijo, las tesis que contienen apariciones de la herradura son consideradas por Russell, de acuerdo a esto, como principios acerca de la implicación lógica que justifican los procedimientos deductivos:

[6] *op. cit.*, p. 162.
[7] David Sanford, *op. cit.*, p. 66.
[8] Bertrand Russell, *op. cit.*, p.161.

> Thus deduction depends upon the relation of implication, and every deductive system must contain among its premisses as many of the properties of implication as are necessary to legitimate the ordinary procedure of deduction.[9]

Russell es conciente que el significado que él le da a la implicación lógica puede resultar artificial y que hay otros significados legítimos para ella, pero considera su elección es la más conveniente por razones de economía conceptual y la sostiene después de las críticas que recibe por parte de Lewis. En efecto, en su contestación a estas críticas en el capítulo XIV de la *Introduction to Mathematical Philosophy*, Russell sostiene:

> It is the truth of "not-*p* or *q*" that is required for the *validity* of the inference; what is required further is only required for the practical feasibility of the inference. [...] I maintain that, whether or not there be such a relation as he [Lewis] speaks of, it is in any case one that mathematics does not need, and therefore one that, on general grounds of economy, ought not to be admitted into our apparatus of fundamental notions.[10]

3. Las críticas a la teoría russelliana de la implicación lógica: Lewis y Parry

Clarence Lewis presenta sus críticas a la teoría de la implicación lógica de Russell en una serie de artículos que publica desde 1912 y las desarrolla en su libro de 1918 *A Survey of Symbolic Logic*[11]. En estos trabajos Lewis argumenta que la relación (sic) de implicación material, simbolizada por la herradura, no es la relación que tenemos en mente cuando decimos que *q* se infiere de *p*, y que no hay ninguna razón de peso para abandonar el uso habitual de "implicación" por este nuevo uso. El carácter inusual de la implicación material, cuando se la entiende como implicación lógica, es responsable de la presencia en los *Principia Mathematica* de teoremas como los siguientes:

Una proposición falsa implica cualquier proposición: $\neg p \supset (p \supset q)$
Una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición: $q \supset (p \supset q)$
Si *p* no implica a *q*, entonces *p* es verdadera: $\neg(p \supset q) \supset p$
Si *p* no implica a *q*, entonces *q* es falsa: $\neg(p \supset q) \supset \neg q$
Si *p* no implica a *q*, entonces *p* implica que *q* es falsa: $\neg(p \supset q) \supset (p \supset \neg q)$

[9] *op. cit.*, p. 159.
[10] Bertrand Russell, (1920), *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, Allen & Unwin, pp. 153-154.
[11] Clarence I. Lewis, (1918), *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, University of California Press.

Si p no implica a q, entonces 'p es falsa' implica q: $\neg(p \supset q) \supset (\neg p \supset q)$
Si p y q son las dos verdaderas, entonces p implica q y q implica p:
$(p \wedge q) \supset ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$
Si p y q son las dos verdaderas, entonces p implica q y q implica p:
$(\neg p \wedge \neg q) \supset ((p \supset q) \wedge (q \supset p))$

Si bien es posible darle al término diversos sentidos, Lewis afirma que hay (por lo menos) un significado adecuado de "implicación" que es necesario respetar:

> The word denotes that relation which is present when we "validly" pass from one assertion, or set of assertions, to another assertion, without any reference to additional "evidence".[12]

En efecto, sostiene Lewis que aunque la matemática contemporánea no se ocupa de la verdad de sus tesis y sus definiciones son arbitrarias, la situación de la lógica es diferente. Si una tesis de un sistema lógico es falsa su uso como premisa introducirá teoremas falsos y su uso como regla de inferencia producirá demostraciones inválidas:

> ... we are hardly ready to speak of a "good" abstract mathematical system whose *proofs* are *arbitrarily invalid*. Until we are, its is requisite that the meaning of "implies" in any system of symbolic logic shall be a "proper" one, and that the theorems —used as rules of inference— shall be *true* of this meaning.[13]

Tanto Lewis como Russell sostienen que los axiomas y los teoremas en un cálculo lógico se usan de dos maneras: (a) como premisas a partir de las cuales se obtienen nuevos teoremas, y (b) como reglas de inferencia mediante las cuales se obtienen nuevos teoremas. Cuando los principios cuestionables, como $q \supset (p \supset q)$, se usan como reglas de inferencia sancionan proposiciones como "Hoy es lunes implica que 2 + 2 = 4" que afirman que existe una relación lógica entre enunciados irrelevantes. Sin embargo, reconoce Lewis, en los *Principia* no se usan esos teoremas cuestionables como reglas de inferencia en las demostraciones, de manera que el sistema de implicación material presentado allí constituye un *organon* aceptable de demostración, pero sólo porque únicamente se usan aquellos principios que están de acuerdo con el significado ordinario de "implica".

La implicación material tiene una importante propiedad en común con la relación de inferencia o implicación lógica: si p es verdadera y q es falsa, entonces el condicional es $p \supset$

[12] *op. cit.*, p. 324.
[13] *op. cit.*, p. 325.

q es falso, y es falso que q se infiera de p. Pero, según Lewis, hay una importante diferencia entre implicación material e implicación lógica: la relación de implicación es una relación entre las extensiones —los valores de verdad— de las proposiciones, mientras que la de implicación lógica es una relación entre las intensiones o significados de las proposiciones. En consecuencia, la implicación estricta puede definirse en términos de la imposibilidad, de manera que p implica estrictamente q puede definirse como es imposible que p sea verdadera y q falsa. Si ~ es el operador de imposibilidad y $\prec$ el de la implicación estricta, esta definición puede expresarse en símbolos de la siguiente manera: $(p \prec q) =_{df} \sim(p \wedge \neg q)$.

La lógica de la implicación estricta tiene, sin embargo, entre sus teoremas contrapartes de las paradojas de la implicación material. En particular, valen las siguientes dos tesis:

> Una proposición imposible implica estrictamente cualquier proposición: $\sim p \prec (p \prec q)$
> Una proposición necesaria es implicada por cualquier proposición: $\sim\neg q \prec (q \prec p)$

Aunque no desarrollaremos aquí sus argumentos, Lewis justifica la presencia de estas dos tesis, y de las contrapartes de los otros principios cuestionados de la implicación material, sosteniendo que son principios correctos —principios que se deben aceptar si uno acepta otros que Lewis sostiene que son intuitivamente incuestionables— para la noción intuitiva de implicación lógica que la implicación estricta pretende formalizar.

La insatisfacción con las paradojas de la implicación estricta de Lewis llevó a varios doctorandos de la universidad de Harvard —universidad en la que Lewis era profesor—a desarrollar teorías alternativas acerca de la relación de implicación lógica. En efecto, la conjunción de una proposición y su negación puede considerarse como un caso paradigmático de proposición imposible; por lo tanto, si se acepta con Lewis que una proposición imposible implica lógicamente cualquier proposición, se debe aceptar como principio válido para la implicación lógica la regla del *ex contradictione quodlibet*. Por ello, quienes no aceptaban el *ECQ* se vieron motivados a buscar alternativas tanto a la teoría de la implicación lógica de Russell como a la de Lewis. Por otra parte, dado que las tautologías son casos paradigmáticos de proposiciones necesarias, aceptar con Lewis que una proposición necesaria es implicada por cualquier proposición obliga a aceptar que una tautología es implicada por cualquier proposición. Pero, aceptar esto obliga, a su vez, a sancionar como inferencias válidas a inferencias cuya conclusión introduce variables proposicionales que no aparecen en las premisas y que, por lo tanto, pueden considerarse inferencias que no son relevantes.

Así, por ejemplo, William Parry —que era a fines de los años veinte y principios de los treinta estudiante de doctorado de la Universidad de Harvard, bajo la dirección de Alfred North Whitehead— desarrolló su teoría de la implicación analítica para caracterizar la relación de “implicación real”, es decir la relación entre dos proposiciones que es necesaria y suficiente para permitirnos pasar, en virtud de razones puramente lógicas, de la afirmación de la primera proposición a la afirmación de la segunda. Los resultados de la investigación de Parry se publicaron, junto con un comentario de Karl Gödel, en 1933 en el *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*[14].

Aunque la intención de Parry era ofrecer una teoría de la consecuencia lógica, concibe su noción de implicación, siguiendo el ejemplo de C. I. Lewis, como una conectiva del lenguaje en lugar de tratarla como una relación metalingüística entre expresiones del lenguaje. La caracterización de esa noción debería, en la opinión de Parry, evitar paradojas de la implicación estricta como que *q* implique *p o no-p*, o que *p y no-p* implique *q*. Parry añade al rechazo de esas implicaciones la objeción al principio de adición, es decir a que *p* implique *p o q*: en todos los casos debe evitarse que en el consecuente de una implicación aparezcan términos irrelevantes respecto de su antecedente. Parry denominó al principio básico de su teoría de la implicación analítica *Principio Proscriptivo*: ninguna fórmula con la implicación real o analítica como relación principal vale universalmente si tiene una variable proposicional que aparezca en el consecuente pero no en el antecedente. Este principio pretende generalizar la idea de que no es posible introducir nuevos términos *ad lib*. Esto resulta patente, según Parry, cuando consideramos sistemas deductivos como la geometría euclidiana: aunque ésta contiene la proposición *Dos puntos determinan una línea recta*, un matemático consideraría absurdo que por ello se lo obligara a admitir que también debe contener la proposición *Dos puntos determinan una línea recta o algunos ángeles tienen alas rojas*. El Principio Proscriptivo no sirve para demostrar fórmulas sino para rechazar la validez de determinados principios que lo violan directamente y de fórmulas que permiten pasar de principios aceptados a otros directamente proscriptos.

[14] William T. Parry, (1933), "Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation)", *Ergebnisse eines mathematischen Kollquiums*, 4, pp. 5-6.

Es importante señalar que ni Parry ni Lewis atribuyen a Russell la utilización de un concepto de implicación lógica que no se compadece, según creen, con la noción de consecuencia lógica utilizada en el discurso matemático. Es esta la motivación para construir sus teorías, y ninguno de estos autores considera que el tratamiento de la implicación lógica como un operador del lenguaje sea un error que se deba corregir. De hecho, Parry —que murió en 1988 y se mantuvo intelectualmente activo hasta una avanzada edad— nunca modificó este aspecto de su teoría de la implicación analítica.

Anderson y Belnap[15] han sido quienes han defendido con más audacia la falta de necesidad de distinguir entre implicación y condicional, y quienes quizás nos permitan entender las razones por las que los autores tratados en este artículo consideraban a la implicación lógica como una conectiva del lenguaje proposicional. Anderson y Belnap sostienen que la distinción entre implicación y condicional se debe a las peculiaridades gramaticales de un lenguaje como el inglés, pero que no es necesario extraer conclusiones metafísicas de estas peculiaridades contingentes. En efecto, en inglés —y en castellano— "implica" es una forma verbal que requiere ser flanqueada por sustantivos y, por lo tanto, se supone que denota una relación entre los objetos nombrados por esos sustantivos, i. e. las proposiciones. Sin embargo, la implicación puede ser considerada una conectiva si se aplica el recurso de la prenominalización; de esta manera, la conectiva de la implicación en castellano sería expresada por "que _________ implica que _______", donde los espacios deben ser llenados por oraciones. La tesis de Anderson y Belnap es que todo uso de la implicación como conectiva puede ser reemplazado por un uso de una conectiva condicional adecuada. En particular, "que *A* implica lógicamente que *B*" puede ser reemplazada por "si *A* entonces, por razones lógicas, *B*", que en virtud de una elipsis se convierten en, respectivamente, "que *A* implica que *B*" y "si *A* entonces *B*".

4. Conclusiones

[15] Alan R. Anderson. y Nuel D. Belnap, (1975), *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. I, Princeton, Princeton University Press, pp. 472-492

.

En este artículo hemos intentado mostrar que, si se tienen en cuenta los textos de Russell, la influyente interpretación de Quine de la teoría de la implicación lógica del autor de los *Principia* resulta al menos injusta. Por una parte, los textos muestran que la teoría de la implicación lógica fue sistemáticamente elaborada y defendida por Russell, y que no fue el producto de una confusión casual de este autor. Por otra parte, no parece poder sostenerse la acusación de Quine que atribuye a Russell la ignorancia de la distinción entre el uso y la mención de una oración, ignorancia que constituiría la fuente de su teoría de la implicación lógica. Por último, es discutible la afirmación de Quine según la cual el considerar a la implicación lógica como un operador del lenguaje constituye una grave confusión que *ipso facto* esteriliza cualquier teoría de la consecuencia lógica.

5. Bibliografía

Anderson, A. R. y Belnap, N. D., (1975), *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. I, Princeton, Princeton University Press.

Barker, S. F., (2006), "Lewis on Implication", *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 42, pp. 10-16.

Barcan Marcus, R., (1990), A Backward Look at Quine's Animadversions on Modalities, en R. Barret & R. Gibson, *Perpectives on Quine*, Oxford, Blackwell, pp. 230-243.

Carnap, R., *The Logical Syntax of Language*, New York, Harcourt Brace, 1937.

Lewis, C. I., (1912), "Implication and the Algebra of Logic", *Mind*, 21, pp. 522-531.

Lewis, C. I., (1917), "The Issues Concerning Material Implication", *The Journal of Philosophy, Psychology and Scientific Methods*, 14, pp. 350-356.

Lewis, C. I., (1918), *A Survey of Symbolic Logic*, Berkeley, University of California Press.

Nelson, E. J., (1930), "Intensional Relations", *Mind*, 39, pp. 440-453.

Parry, W. T., (1933), "Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation)", *Ergebnisse eines mathematischen Kollquiums*, 4 , pp. 5-6.

Parry, W.T., (1989), "Analytic Implication: Its History, Justification and Varieties", en J. Norman y R. Sylvan (eds.), *Directions in Relevant Logic*, Boston, Kluwer, pp.101-118.

Quine, W. v. O., (1961), "Reply to Professor Marcus", Synthese, XIII, pp. 323-330.

Russell, B., (1906), "The Theory of Implication", *American Journal of Mathematics*, 28, pp.

159-202.
Russell, B., (1908), “If and Imply, a reply to Mr MacColl”, *Mind*, 17, pp. 300-301.
Russell, B., (1920), *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, Allen & Unwin.
Sanford, D. H., (1989), *If P, then Q. Conditionals and the Foundations of Reasoning*, London & New York, Routledge, 1989.