UN ABORDAJE PARA EL MODELO EXPONENCIAL

Silvia V. Altman; Claudia R. Comparatore; Liliana E. Kurzrok

Colegio Martín Buber; Colegio de la Cuidad
svaltman@speedy.com.ar; ccompara@fibertel.com.ar; liliku@fibertel.com.ar

Resumen
Coincidimos con la postura que señala que para el aprendizaje de la matemática es indispensable que los alumnos construyan el sentido de los conceptos que trabajan en el aula. La modelización encaminada a resolver problemas propios de la matemática o ajenos a la misma, contribuye a este fin. Para ello les presentamos a los alumnos diferentes problemas en los cuales pueden avanzar con los conocimientos que poseen pero, en algún momento éstos se vuelven insuficientes o poco económicos para completar la resolución. Surge así la necesidad del nuevo concepto como herramienta que permitirá avanzar en forma más eficaz. En este trabajo presentamos una secuencia sobre modelos exponenciales que apunta a ese fin y que ponemos en práctica hace varios años con alumnos de cuarto y quinto año.

Palabras claves: Modelización exponencial. Porcentaje de aumento fijo.

Contenido de la Comunicación

Es nuestra intensión compartir una secuencia sobre el modelo exponencial que centra el trabajo en las propiedades que permiten asegurar el trabajo con este modelo. La propuesta plantea una actividad inicial en la que el aumento constante, en porcentaje, de la masa de una población de bacterias permite el análisis de la variación y la introducción de un nuevo tipo de función. Las propiedades de estas funciones se analizan a partir de los problemas planteados poniendo especial énfasis en la construcción de la caracterización del modelo que es que a iguales incrementos de la variable independiente se dan iguales porcentajes de aumento o disminución en la variable dependiente. Esta característica permite estudiar varios tipos de ejemplos reales en los que esto sucede: poblaciones de bacterias, plazos fijos y masa de sustancias radiactivas. Se remarca la ventaja del modelo por sobre la experimentación ya que puede predecirse lo que ocurrirá en cierto momento (en el caso de las sustancias radiactivas la edad de fósiles por la determinación del Carbono 14) o qué causas hacen que dicha predicción no se cumpla (en el caso de las bacterias la aplicación de algún pesticida).
Otro marco en el que trabajamos es el gráfico y su análisis desde lo que caracteriza al gráfico de una función exponencial según el cambio de sus parámetros hasta la necesidad de este recurso para resolver una ecuación que no puede resolverse algebraicamente. Este tipo de trabajo plantea

un desafío a los alumnos, muchos de los cuales no tienen la experiencia de estar frente a ecuaciones que no puedan “despejar” y esto permite un análisis más próximo a la realidad de modelizaciones concretas.

INTRODUCCIÓN

Es fundamental, para el aprendizaje de la matemática, que los alumnos construyan el sentido de los conceptos que trabajan en el aula. Entendemos por sentido de un concepto el conjunto de problemas, propiedades, procedimientos y formas de representación asociados al mismo. Brousseau (1983) incluye también en el sentido "el conjunto de concepciones que el concepto rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc.".

Por este motivo pensamos que la modelización, encaminada a resolver problemas propios de la matemática o ajenos a la misma, contribuye a este fin. Para ello les presentamos a los alumnos diferentes problemas en los cuales pueden avanzar con los conocimientos que poseen pero, en algún momento éstos se vuelven insuficientes o poco económicos para completar la resolución. Surge así la necesidad del nuevo concepto como herramienta que permitirá avanzar en forma más eficaz.

La modelización fomenta la puesta en juego de una serie de elecciones que permitirán avanzar en los conocimientos y también determinar el comportamiento a futuro sin necesidad de recurrir a la experimentación.

La gestión de la clase es fundamental para conseguir este propósito. Es necesario que se fomente el debate en torno a los procedimientos utilizados y a los errores cometidos. Para esto debe existir un espacio para el intercambio en pequeños grupos, donde el docente solo aclara algunas dudas y orienta, nunca explica, y luego un debate con el total de la clase donde el docente es el moderador de la discusión. En esta instancia es fundamental que el docente conozca las diferentes producciones grupales para decidir si se analizan todas. Luego institucionalizará los conocimientos aprendidos.

Nos proponemos presentar una secuencia que trabajamos desde hace varios años en polimodal, para introducir el modelo exponencial.

Los conocimientos previos necesarios para trabajar esta secuencia son: características generales de las funciones, porcentaje, lectura y construcción de gráficos cartesianos, manejo de propiedades algebraicas con el objeto de transformar expresiones y obtener nuevas conclusiones y nociones sobre la necesidad de demostración de las conjeturas planteadas.

ANÁLISIS PREVIOS

El marco didáctico principal en el que nos ubicamos es La teoría de situaciones de Guy Bousseau, su propósito es el de modelizar la enseñanza, en los últimos años se ha realizado un trabajo teórico importante para extender sus conceptos de manera de poder adaptarlos al estudio de las clases. Sin embargo el trabajo que aquí presentamos no es una investigación en la que tomamos el rol de observadores, sino que las utilizamos y modificamos en función de las aulas en las que lo fuimos presentando. La presentación de esta secuencia tiene el fin de poner en juego los conocimientos sabidos y que se promuevan los nuevos para eso recurrimos a la ingeniería didáctica y utilizamos el concepto de trasposición didáctica (Chevallard) de los conceptos que queremos que se pongan en juego teniendo en cuenta el entorno en el que esos conocimientos van establecerse. Este punto es fundamental en el análisis de la situación que se plantea pues para que esta pueda dar los frutos necesarios es indispensable tener en cuenta la población y la institución donde se trabajará. Procuramos que los conceptos, que pretendemos sean aprendidos, aparezcan en un contexto, no necesariamente cotidiano, sino como necesario para avanzar en el problema planteado.

Podemos anticipar que la secuencia genera la inquietud necesaria en la clase para la participación de todos los alumnos, sobre todo por el carácter conjetural que permite la participación y opinión de la mayoría. Pueden presentarse alumnos apáticos a los cuales se intenta incluir en la actividad, especialmente en las puestas en común.

Uno de los obstáculos que anticipamos es que, el hecho de venir trabajando fuertemente el modelo lineal y la proporcionalidad, motivará a intentar seguir usándolo, lo que llevará a resultados erróneos.

OBJETIVOS:

- Poner en funcionamiento herramientas para la modelización: selección de variables y análisis de condiciones.
- Interpretar las distintas representaciones: gráficas y algebraicas.
- Analizar la validez de las respuestas obtenidas.
- Poner en funcionamiento la notación algebraica para representar modelos.

SECUENCIA

Actividad 1

La masa de una población de bacterias aumenta un 25 % por hora. En un determinado momento se colocan 120 g de bacterias en una cubeta. ¿Cuántos gramos de bacterias habrá al cabo de 1 hora? ¿Y de 2 horas? ¿Y de 3 horas?¿ Y de ***t*** *horas? Representen gráficamente la masa total de bacterias en función del tiempo.*

Los alumnos, separados en pequeños grupos resuelven el problema con los conocimientos que tienen disponibles hasta el momento. En general, van resolviendo cada una de las preguntas a partir de la respuesta anterior.

Para responder a la primera, como saben que se comienza con 120 g, una hora después habrá un 25 % más, es decir 120 · 0,25 + 120 = 150 gramos. En el caso de la segunda parten de los 150 gramos, 150 · 0,25 + 150 = 182,5 gramos. Análogamente responden para tres horas.

Muchos alumnos calculan los porcentajes utilizando la "regla de tres simple" y a continuación lo suman a la masa anterior.

Suele suceder que aquí encuentren la primera dificultad: si las primeras preguntas las contestaron a partir de la anterior, ¿cómo se podrá calcular cuál será la masa de bacterias luego de *t* horas? En este momento es conveniente que el docente gestione una puesta en común en la cual los diferentes grupos exponen las diferentes estrategias utilizadas para responder a las primeras preguntas. Puede analizarse la equivalencia entre la proporcionalidad directa, la multiplicación por 0,25 y la multiplicación por 1,25 en lugar de hacer dos pasos. Para esta última idea la siguiente tabla muestra los distintos pasos viendo las operaciones involucradas y no los resultados.

Tiempo desde que comenzó la experiencia (horas)	0	1	2	t
Masa de bacterias (gramos)	120	120+120.0,25 = 120.1,25	120.1,25 1,25 = $120.1,25^2$	$120.1,25^t$

Este recurso es útil a la hora de producir fórmulas, pues se registra en la tabla la memoria de las operaciones que se fueron resolviendo en cada paso. Si señalamos con colores diferentes los números que varían y los que no, se pueden identificar con mayor claridad cuáles son las constantes y las variables de la fórmula buscada.

A continuación el docente pregunta a los alumnos:

¿Esta fórmula corresponde a alguna de las funciones conocidas hasta el momento (lineal, cuadrática, polinómica)?

Como al realizar el gráfico, según la escala utilizada, la variación es poca, en muchas ocasiones los alumnos responden que se trata de una recta, es decir la representación de una función lineal. En la puesta en común, ante la pregunta de cómo sabemos que es lineal sin mirar el gráfico se obtienen dos argumentos para la posibilidad de que sea lineal:

- la variación debe ser constante y aquí no se verifica,
- la fórmula de una función lineal es de la forma $y = m\,x + b$, lo cual no ocurre.

Se define entonces, una nueva función: la función exponencial cuya fórmula tiene la forma $y = k \cdot a^x$.

Se plantea ahora una nueva cuestión, en el problema dice que la masa de las bacterias aumenta un 25% cada hora, con esta información se armó una fórmula con valores enteros de tiempo. Lo que no se sabe es si la fórmula encontrada verifica el enunciado pasada 1 hora desde cualquier momento. El docente cuestiona:

¿La función que encontramos verifica que si pasa 1 hora desde cualquier momento, la masa aumenta un 25%?

Si $f(x) = 120 \cdot 1{,}25^x$, entonces $f(b) = 120 \cdot 1{,}25^b$ por lo tanto

$f(b+1) = 120 \cdot 1{,}25^{b+1} = 120 \cdot 1{,}25^b \cdot 1{,}25 = f(b)\,.\,1{,}25$

Es decir que $f(b+1)$ es un 125% de $f(b)$ para cualquier b. Lo que indica que al avanzar una hora, desde cualquier momento, aumenta un 25%. La fórmula encontrada cumple con el enunciado.

Por lo tanto, podemos identificar a la función exponencial como aquella que por cada unidad de la variable independiente aumenta o disminuye un porcentaje constante en la variable dependiente.

Luego trabajaremos con los alumnos una idea más general que es que las funciones exponenciales tienen la característica de que para intervalos iguales de la variable independiente, la variable dependiente aumenta o disminuye un porcentaje que solo depende de dicho incremento.

Posteriormente les presentamos otros problemas similares pero en los que se apunta a analizar la incidencia de los parámetros en la gráfica. Para ello cambiamos el porcentaje de crecimiento y la cantidad de bacterias con las que se empieza la observación.

También planteamos el contexto del dinero en plazos fijos que produce situaciones parecidas a las de las bacterias. En la resolución de los distintos problemas los alumnos podrán reinvertir lo que utilizaron en el primer problema. También podrán analizar los diferentes gráficos. Luego de una puesta en común se llega a las siguientes conclusiones:

- El gráfico corta al eje ***y*** en el valor inicial de la observación.
- El valor de ***a*** se consigue haciendo (100 + el porcentaje):100 > 1.
- La función es creciente.
- Cuanto mayor es el valor de ***a***, el crecimiento es mayor.

Actividad 2

Las sustancias radiactivas tienen la propiedad de desintegrarse al emitir espontáneamente partículas alfa, electrones y rayos gamma, por lo cual pierden masa a medida que pasa el tiempo. En un laboratorio se hace una observación de una sustancia radiactiva que pierde el 2,5% de su masa cada día. En un principio la masa de dicha sustancia es de 3kg. ¿Cuál será la masa de dicha sustancia luego de 1 semana? ¿Y 30 días después? ¿Y de 1 año? Escriban una fórmula que permita calcular la masa de esta sustancia en función del tiempo. Grafiquen la función hallada.

Este problema plantea una situación similar pero donde se trabaja con sustancias radiactivas que pierden un porcentaje fijo de masa cada unidad de tiempo. En una puesta en común se exponen las distintas resoluciones de los problemas y se analiza similitudes y diferencias entre las distintas fórmulas y sus gráficos.

Los alumnos pueden identificar en este momento que las primeras actividades presentaban un porcentaje de aumento y esta última el porcentaje es de decrecimiento con lo cual la función presenta las siguientes características:

- La función es decreciente
- El valor de ***a*** se calcula haciendo (100 – el porcentaje) : 100 < 1

Actividad 3

Utilizando un soft adecuado, Excel, Graphmatica, Winplot, Derive u otro que se tenga disponible, grafiquen y saquen conclusiones respecto a las modificaciones del gráfico en función de los parámetros involucrados. Es decir qué características presentan las funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x$ *cuando cambian los valores de k y a.*

La ventaja de utilizar un graficador radica en no invertir tiempo en la construcción de cada gráfico ya que lo central en esta actividad es sacar conclusiones respecto al comportamiento de la función según cómo se cambien sus parámetros. Es interesante que los alumnos decidan qué gráficos juntarán en un mismo sistema para poder sacar conclusiones y la posibilidad de que experimenten con otros parámetros para comprobar sus suposiciones. En clase se podrá trabajar una justificación adecuada.

Algunos alumnos intentan utilizar valores negativos para *a* lo que permite el análisis de las condiciones necesarias para la definición de la función exponencial adentrándonos en el dominio y a las propiedades de la potencia.

Actividad 4

En este instante planteamos la idea de relacionar el tiempo con el porcentaje de crecimiento o decrecimiento:

Si una población de bacterias aumenta su masa un 2% cada hora, ¿cuál será el porcentaje de aumento por día? ¿Y por minuto?

Puede esperarse que la respuesta de algunos alumnos sea usando proporcionalidad, es decir que en un día aumentará 24 · 2% y por minuto $\frac{2}{60}$ %.

Otros tendrán dificultades con el hecho de no tener una masa inicial y tratarán de analizar dándole un valor inicial a la masa de bacterias.

Puede suponerse que otros también realicen cálculos desde el comienzo y con algunos ejemplos qué sucede pasado un día. Estos últimos comprobarán que la afirmación de sus compañeros respecto a la proporcionalidad no es cierta. Con cualquier ejemplo obtienen un aumento de casi un 61% que es diferente al 48% que daría utilizando la proporcionalidad.

Esto motiva a plantear un análisis general:

¿Si en cierto momento hay $k \quad 1{,}02^t$ bacterias cuál será la masa 24 horas después?

Aquí la demostración que se realizó en el primer problema los guía:

24 horas después la masa será: $k \cdot 1{,}02^{t+24} = k \cdot 1{,}02^{t} \cdot 1{,}02^{24} = k \cdot . \ 1{,}02^{t} \cdot 1{,}608$.

Esto indica que 24 horas después la masa se multiplica por $1{,}02^{24}$, es decir aumenta un 60,8%. Los alumnos que necesitaron utilizar una masa inicial pueden notar que realizando este procedimiento con su masa, dicho valor no interviene en el análisis del porcentaje.

Esto permite afirmar que el porcentaje de crecimiento o decrecimiento:

- No es proporcional al tiempo transcurrido,
- Es invariante para un intervalo fijo

La experiencia nos indica que este concepto no será atrapado por todos los alumnos al mismo tiempo y que habrá que invertirlo en diferentes problemas para asegurar su aprendizaje. Por este motivo utilizamos diferentes problemas y contextos para plantear la relación entre el intervalo de tiempo y el porcentaje de aumento o disminución. Se llega después de un camino más o menos corto, según el grupo de alumnos que en las funciones exponenciales para un incremento fijo de la variable independiente se produce un crecimiento o decrecimiento fijo en la variable dependiente. Es deicir: si la variable independiente se tiene un incremento ***h*.**

$f(t) = k \,.\, a^t$ y $f(t + h) = k \,.\, a^{t+h} = k \,.\, a^t \,.\, a^h = f(t) \,.\, a^h$ con lo cual se obtiene que el porcentaje de aumento o disminución es $a^h \,.\, 100$

Actividad 5

En un banco ofrecen dos formas distintas de depósitos.

Opción A: Interés simple del 10% mensual invirtiendo un capital de 1000 como mínimo.

Opción B: Interés compuesto del 10% mensual invirtiendo un capital de 500 como mínimo

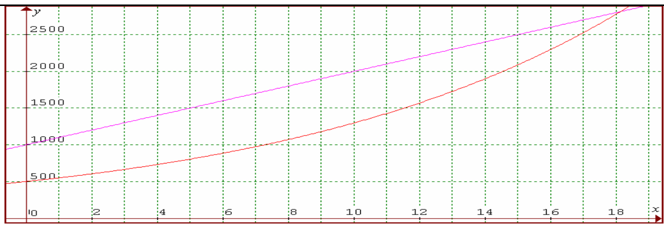
¿Qué opción es la más conveniente invirtiendo el mínimo requerido?

Este es un típico problema comparación de funciones donde al armar cada una de las funciones queda:

Opción A. $y = 1000 + 100x$

Opción B: $y = 500 \,.\, 1{,}1^x$

El gráfico permite analizar ambas opciones.



Se observa que luego de 18 meses la Opción B es la más conveniente.

Lo que seguramente se presentará es la necesidad de los alumnos de plantear la igualdad de las expresiones para buscar el momento exacto del cruce de las funciones.

Esto plantea una ecuación que no puede resolverse algebraicamente, aunque los alumnos harán muchos intentos para lograrlo, y que requiere de un análisis numérico de la situación.

Este tipo de problemas son muy interesantes debido a la imposibilidad de “despejar” la variable. Esta situación suele ser más frecuente de lo que los alumnos creen en un contexto de modelización matemática y es bueno que se familiaricen con estas resoluciones, lo que permite desencasillar el objeto “ecuaciones” a una manipulación algebraica conveniente.

El recurso gráfico permite analizar entre qué valores se encuentra la solución y cuántas soluciones tiene. A partir de ese análisis y con una planilla de cálculo se puede obtener la solución con la aproximación que se quiera establecer.

La forma de determinar en qué intervalo se encuentra la solución dependerá de cada chico o de cada grupo. Lo que el gráfico permite anticipar en que antes de cruzarse una función queda encima de la otra y después se invierte. Por lo tanto con la planilla de cálculo esa determinación la pueden hacer con diferencias o con alguna función lógica. Por ejemplo con esta tabla y con dos decimales de exactitud se tiene:

	Opción A	Opción B	¿A>B?
	$y = 1000+ 100x$	$y = 500 . 1,1^x$	**Si(A>B; 1 ; 0)**
18,11	2811	2809,25739	0
18,12	2812	2811,93618	0
18,13	2813	2814,61752	1
18,14	2814	2817,30141	1

Es decir la solución estará entre 18,12 y 18,13.

Actividad 6

Los logaritmos surgen como una herramienta para responder cuestiones como las siguientes:

1. Una población de bacterias aumenta el 100% cada hora. Se coloca en este momento 1 bacteria en una cubeta. ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que haya 1024 bacterias?

2. Las mismas cuestiones que el problema anterior pero si la población aumenta un 30% cada hora.

Para responder al primer problema se plantea $2^t = 1024$, los alumnos pueden ir "probando" hasta hallar la solución pero ellos mismos reclaman alguna herramienta que les permita resolver este tipo de ecuación de manera más eficaz. En el segundo problema se plantea $1{,}3^t = 1024$ aquí ya se resisten totalmente a probar con lo cual surgen los logaritmos como una necesidad para resolver este tipo de cuestiones.

CONCLUSIONES

Esta forma de presentar el modelo exponencial, permite distinguir propiedades que de otra manera permanecen ocultas. La forma tradicional de comenzar por el gráfico de funciones exponenciales, no pone en jugo las propiedades modelizadoras de las mismas. Además los logaritmos aparecen como una necesidad de cálculo y no como una operación aislada que se utiliza en ciertas ecuaciones también descontextualizadas.

BIBLIOGRAFÍA

- Altman, Comparatore, Kurzrok; (2002), *Funciones 2*, Ed. Longseller
- Bosh, M; Chevallard, Y. (1999), La sensibilidad de la actividad matemática a los ostensivos. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.19, Nº1, pp77-124
- Brousseau, G, (1994) Los diferentes roles del maestro, en Parra, C. y Saiz, I. (Comp.) Didáctica de matemáticas, Editorial Paidós, Buenos Aires, p. 72 y siguientes
- Brousseau, G. (1993), Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, en: *Trabajos de Matemática*, FAMAF, Universidad de Córdoba, Córdoba, Caps. I-IV.
- Charnay, Roland (1988), Aprender (por medio de) la resolución de problemas, en Parra Cecilia, Saiz, Irma: Didáctica de las matemáticas: Aportes y reflexiones-1993- Paidos - Buenos Aires.
- Chevallard Y. (1997), La transposición didáctica. Aique. Buenos Aires.
- Chevallard, Y. y otros (1997), Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje, ICE, Horsori Editorial, Barcelona
- Dirección de currícula (2000), Matemática. Documento Nº 2. La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática, Buenos Aires.
- Sadovsky, P. (2005) La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En Reflexiones teóricas para la educación matemática. Libros del Zorzal. Buenos Aires.