LA RIQUEZA ALGEBRAICA DE LAS RELACIONES GEOMÉTRICAS

Marisa Giovanniello

Liceo Victor Mercante. U. N. L. P
marisagiova@yahoo.com.ar

Comunicación oral

Un sentimiento habitual en nosotros, profesores de matemática, es la decepción cuando vemos que nuestros alumnos ofrecen evidencias de no haber logrado un aprendizaje significativo en nociones que consideramos claves. Sin embargo no es necesario ahondar mucho para ver que estas pretensiones de aprendizaje han estado ausentes en los diseños didácticos.

La propuesta destinada a alumnos de 1º año de ESB es una transposición didáctica que considera el tratamiento explícito de la noción de equivalencia y la interpretación del lenguaje algebraico. Se aprovecha la noción de perímetro de figuras geométricas y la fuerza de la prueba pragmática para plantear equivalencias que son aceptadas por su sentido. De este modo aparecen distintas sintaxis de expresiones algebraicas que el docente revalida, apoyándose en propiedades y reglas de las operaciones matemáticas, para finalmente acordar la aceptación de ciertas equivalencias del lenguaje algebraico.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Matemática en el nivel secundario tiene por característica central ocuparse del recorrido secuencial, sistemático y bien estructurado sobre ciertos contenidos de los campos: numérico, algebraico y geométrico. Es para nuestra lógica, de docentes, que ciertos significados, habilidades y "aprendizajes" el alumno tiene que haberlos obtenido por el simple hecho de haber transitado y aprobado esos años de enseñanza. Sin embargo, nos es muy fácil encontrar ejemplos que nos evidencian lo contrario. Alumnos de nivel universitario que para resolver 1- 1/3 necesitan papel y lápiz o una calculadora, otros que identifican como diferentes las expresiones X/2 y 0,5X y otros que al ver a un cuadrado dibujado con los lados oblicuos afirman que es un rombo…

Muchas veces cuando creemos que el aprendizaje, al modo que lo deseamos, esta ocurriendo nos sacuden éstas observaciones y ante ellas tenemos dos opciones: auto convencernos pensando que es responsabilidad de nuestros alumnos no haber "captado" significados o hacernos cargo y reconocer que les resultó posible pasar por nuestras aulas sin haberlo logrado.

MARCO TEÓRICO

Identifico un primer problema: el hecho de que como docentes esperamos el desarrollo de capacidades y procedimientos que están presentes de manera subliminal en nuestras prácticas pero que están ausentes en nuestro contrato didáctico. Nos sirven para medir negativamente el aprendizaje pero no las consideramos objetos de enseñanza. A éstas nociones que deben ser aprendidas pero que no son enseñadas Yves Chevallard las llamó: paramatemáticas y protomatemáticas y al respecto escribió:- *"Nociones matemáticas, nociones paramatemáticas y protomatemáticas constituyen estratos cada vez más profundos del funcionamiento didáctico del saber. Su consideración diferencial es necesaria para el análisis didáctico: por eso el análisis de la transposición didáctica de cualquier noción matemática supone la consideración de nociones paramatemáticas, las que a su vez deben ser consideradas a la luz de ciertas nociones promatemáticas"* [1]

Es nuestro trabajo hacer la transposición didáctica y transformar estos "objetos del saber" en "objetos a enseñar", explicitarlos en lo posible y hacerlos aflorar a la superficie de nuestro discurso didáctico.

Identifico también otra necesidad: la de trabajar relacionando lo nuevo con los conocimientos previos. La teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel considera esto como elemento central sosteniendo que de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante es lo que el alumno ya sabe. Por lo tanto no podemos ignorar la estructura cognoscitiva del alumno, debemos conocer los conceptos pre-existentes (subsumidores) para lograr relacionar el nuevo conocimiento con el aprendizaje previo. El material que presentamos al alumno debe ser potencialmente significativo y esto presupone que debe estar relacionado de manera no arbitraria y sustancial con cualquier estructura cognoscitiva apropiada. Para Ausubel: *"La eficacia del aprendizaje significativo se debe a dos de sus características: su sustancialidad y su falta de arbitrariedad"…"La interacción de los significados potencialmente nuevos y las ideas pertinentes de la estructura cognoscitiva del alumno da lugar a los significados reales"* [2]

Nuestro esfuerzo está en lograr la interacción de las estructuras conceptuales a través de la reflexión y la búsqueda de significados comunes. Esto significa que no debemos "esperar" ciertas interacciones sino que debemos provocar su aparición.

---

1 Chevallard, Yves.(1998) *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* 4-30

2 Ausubel, David (1991) *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* Cap 2

PROPUESTA PEDAGÓGICA

Fundamento y finalidad

Al desarrollar el contenido de perímetros de figuras geométricas con alumnos de 1º año de ESB encuentro pilares para trabajar: el concepto de perímetro, la simbolización de medidas, el manejo de unidades, la operatoria con números decimales, la vinculación del perímetro con otras magnitudes en forma directamente proporcional, los problemas, la construcción geométrica y también**:** su riqueza algebraica.

Mi intención es hacer aflorar el significado de la equivalencia algebraica y su lenguaje (noción paramatemática). Para ello presento una serie de actividades que se apoyan en lo que los alumnos ya saben hacer: observar condiciones geométricas, calcular perímetros y compararlos para conducirlos a elaborar conclusiones, socializarlas y lograr que las expresen en lenguaje simbólico. Las equivalencias algebraicas que obtienen son aceptadas por la fuerza que tiene para ellos la argumentación pragmática basada en la verificación del cálculo y en el pensamiento geométrico intuitivo. Esto es aprovechado para sentar bases operatorias (explicitando propiedades) y para reconocer expresiones algebraicas equivalentes.

El puente que se recorre exige la aparición de nuevos significados como el de “variable” y va a permitir construyendo sentidos comunes (aprendizaje significativo) aceptar por primera vez diferentes sintaxis de ciertas expresiones algebraicas.

Metodología

Se basa en el desarrollo, por parte del alumno y en clase, de una secuencia de actividades recorriendo una instancia individual, una grupal y finalmente, con la intervención del docente, una social con la obtención de conclusiones.

Se plantea una repetición del recorrido de la propuesta con un cambio de consigna para que cada alumno la resuelva en su casa y presente resultados en la clase siguiente.

Objetivos

La intervención pedagógica se diseña para que el alumno logre:

- Descubrir relaciones geométricas entre perímetros
- Interpretar el concepto de variable
- Enunciar relaciones en lenguaje coloquial
- Enunciar relaciones en lenguaje simbólico
- Interpretar el sentido de ciertas relaciones de equivalencia
- Aceptar la equivalencia entre ciertas expresiones algebraicas

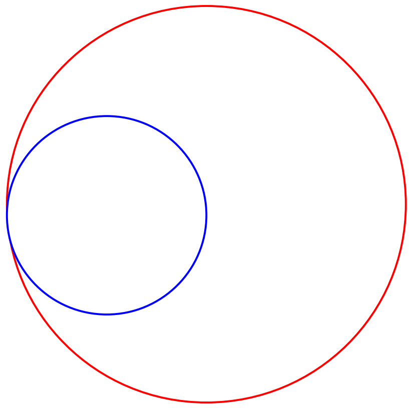
Actividades

Se presentan tres secuencias de actividades para desarrollar en clase y otra de deber

Secuencia 1

Actividades Individuales

1) Observa la siguiente figura y construye una similar en tu carpeta eligiendo una medida para el diámetro de la circunferencia mayor.



Observación: La circunferencia azul es tangente a la circunferencia roja y contiene a su centro

2) Calcula la longitud de cada curva: la roja y la azul

3) Responde: ¿Qué relación hay entre las dos longitudes?

Actividades grupales

1) Comparen los resultados de las actividades anteriores

2) Completen el enunciado relacionando los resultados:

"La longitud de una circunferencia de diámetro D es igual…………………………"

3) Escriban la relación en forma simbólica

Actividades generales

Guiados por el docente cada grupo escribe en el pizarrón su conclusión simbólica.

Se acuerdan significados y se recuerdan propiedades y reglas de cálculo de las operaciones producto y cociente.

Resultados esperados:
Después de elegir la medida del diámetro de la circunferencia mayor el alumno llega con sus cálculos a descubrir que la longitud de la circunferencia menor es la mitad que la de la mayor.
Al hacer la comparación de los resultados, en el grupo, observan que tomando distintos valores para el diámetro se llega siempre a la misma relación. Entonces llegan en general a una conclusión del tipo:"La longitud de una circunferencia de cierto diámetro es igual al doble de la longitud de la circunferencia que tiene la mitad del diámetro"
Esto escrito simbólicamente acerca expresiones como:

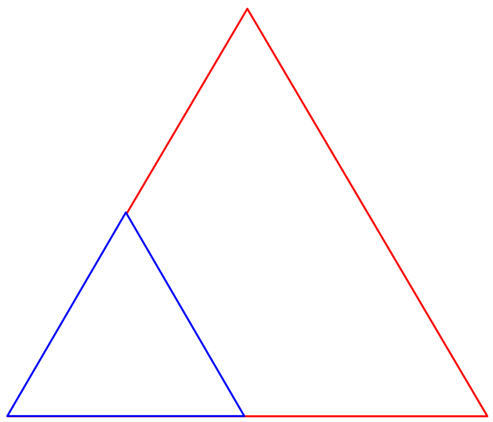
$\pi . D = 2. \pi . \frac{D}{2}$ $\qquad$ $\pi . D = \pi . \frac{D}{2} + \pi . \frac{D}{2}$ $\qquad$ u otras…

Las equivalencias son aceptadas en principio por el sentido que para ellos tiene cada cálculo pero nuestra intención va más allá: tomarlas como objetos matemáticos e indagar en las diferentes sintaxis, justificándolas con propiedades, reglas de cálculos y acuerdos de lenguaje.

Secuencia 2

Actividades individuales

1) Observa la siguiente figura y construye una similar en tu hoja eligiendo una medida para el lado del triángulo mayor



Observación: El triángulo azul tiene como vértices a dos puntos medios de dos lados del triángulo rojo

2) Calcula el perímetro de cada triángulo (del rojo y del azul)

3) Responde: ¿Qué relación hay entre las dos longitudes?

Actividades grupales

1) Comparen los resultados de las actividades individuales

2) Completen el enunciado relacionando los resultados:

"El perímetro de un triángulo de lado L es igual ………………………………………….."

3) Escriban la relación anterior en forma simbólica

Actividades generales

Guiados por el docente cada grupo escribe en el pizarrón su conclusión simbólica.

Se acuerdan significados y se recuerdan propiedades de las operaciones: producto y cociente.

Se hace una lista de expresiones equivalentes con diferentes sintaxis

Resultados esperados:

Después de elegir una medida para el lado del triángulo mayor y hacer los cálculos, el alumno descubre que el perímetro del triángulo mayor (rojo) es el doble que el del triángulo menor (azul). El trabajo de comparación en el grupo les hace ver que para cualquier medida del lado se obtiene la misma relación. Entonces, completan una conclusión del tipo:

"El perímetro de un triángulo de lado L es igual al doble del perímetro de un triángulo que tiene la mitad de lado"

Esta relación lleva a que aparezcan equivalencias del tipo:

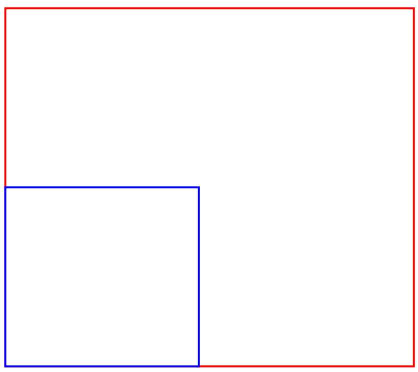
$3.L = 2.\left(3.\frac{L}{2}\right)$ ó $L + L + L = 2.\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right)$ u otras…

Se trabaja entonces cada equivalencia reconociendo las diferentes sintaxis con que pueden presentarse. Se justifican con propiedades y reglas de cálculo.

Secuencia 3

Actividades individuales

1) Observa la siguiente figura y construye una similar en tu hoja eligiendo la longitud del lado L del cuadrado mayor



Observación: El cuadrado azul tiene como vértices a dos puntos medios de dos lados del cuadrado rojo

2) Calcula el perímetro de cada cuadrado (del rojo y del azul)

3) Responde: ¿Qué relación hay entre las dos longitudes?

<u>Actividades grupales</u>

1) Comparen los resultados de las actividades anteriores

2) Completen el enunciado relacionando los resultados:

" El perímetro de un cuadrado de lado L es igual ……………………………………….."

3) Escriban el enunciado anterior en forma simbólica

<u>Actividades generales</u>

Guiados por el docente cada grupo escribe en el pizarrón su conclusión simbólica.

Se acuerdan significados y se recuerdan propiedades de las operaciones: producto, cociente y suma.

Resultados esperados: Después de elegir una medida para el lado del cuadrado mayor (rojo) y hacer los cálculos el alumno obtiene que el perímetro del cuadrado mayor (rojo) es el doble que el perímetro del cuadrado menor (azul). Comparando los resultados en el grupo ven que la relación ocurre para cualquier valor del lado L. Entonces llegan a una conclusión del tipo: "El perímetro de un cuadrado de lado L es el doble que el perímetro de un cuadrado de la mitad de lado" Que se traduce a expresiones como: $4. L = 2. (4. \frac{L}{2})$ o $L + L + L + L = 2. (\frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2})$ u otras…. En el pizarrón se presentan y discuten las diferentes expresiones acordando que representan con diferente forma en el lenguaje el mismo significado.

Actividad para hacer en casa

Escribe nuevas fórmulas de equivalencia tomando ahora como dato:

d al diámetro de la circunferencia menor (azul)

l al lado del triángulo menor (azul)

l al lado del cuadrado menor (azul)

Ausubel, David; Novak, Joseph; Hanesian, Helen. (1991) *Psicologia educative. Un punto de vista cognoscitivo.* México. Trillas. 623pag.

Barallobres, Gustavo. (2000) Selección de apartados sobre *Algunos elementos de la didáctica del álgebra.* Material de circulación del curso: “Álgebra: enseñanza, aprendizaje y evaluación” organizado por el departamento de Cs. Exactas y Naturales de la Facultad de Humanidades y Cs. de la Educación. U.N.L.P entre junio y noviembre del año 2004.

Chevallard, Yves. (1998) *La transposición didáctica: del saber del sabio al saber enseñado.* Buenos Aires. Aique. 196pag.