Producir geometría con GeoGebra. Una experiencia colaborativa en el nivel universitario

Mauro Natale[1,3]; María Cecilia Papini[2,4]

[1]NUCOMPA, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
[2]ECienTec, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
[3]natale.doc@gmail.com
[4]mcpapini@mail.com

Resumen

Este trabajo pretende comunicar una experiencia colaborativa realizada por un grupo de docentes que tenemos la doble intención de modificar prácticas de enseñanza incluyendo las TIC en un aula de nivel universitario e iniciar un camino de estudio colaborativo en temas de enseñanza de la geometría en este nivel. El grupo colaborativo está conformado por siete profesores de matemática que desarrollamos actividades docentes en escuelas secundarias de la ciudad de Tandil y en los primeros años de las carreras que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Dos de nosotros tenemos un recorrido de investigación en matemática y didáctica de la matemática respectivamente. Concretamente realizamos colaborativamente el diseño, estudio y puesta en el aula de una secuencia de dos problemas de geometría para trabajar con GeoGebra. También hicimos registros de esas escenas del aula y de nuestras propias discusiones grupales. En estos momentos iniciamos un análisis de la experiencia. En los apartados que siguen, explicitamos algunos puntos de partida respecto de cómo concebimos esta experiencia de trabajo colaborativo. Luego caracterizamos los problemas de la secuencia y su puesta en el aula de la materia “Geometría con regla y compás” de la carrera de Profesorado de Matemática a partir de las producciones de un alumno para resolverla y sus discusiones con el resto del grupo.

Palabras clave: enseñanza de geometría; GeoGebra en el aula; formación docente; grupo colaborativo.

Algunos puntos de partida

Concebimos la clase como una comunidad que produce conocimientos matemáticos a partir de la interacción de los alumnos con problemas que los enfrentan a rupturas respecto de los conocimientos que tienen en un cierto momento. Este trabajo matemático de los alumnos no sólo se realiza a nivel personal o individual, en la confrontación de cada alumno con una problemática que ofrece resistencias, sino también a nivel del grupo de clase que comparte preguntas, explica y discute procedimientos, argumenta en favor de su validez, acuerda y negocia significados con sus pares y con el docente (Brousseau, 2007; Sadovsky, 2005 en Papini, 2015).

Compartimos las ideas de muchos autores respecto del cambio que debe darse en la enseñanza de la geometría, superando situaciones de enseñanza que ponen énfasis solamente en aspectos perceptivos de las representaciones de los objetos geométricos. En particular, suscribimos las palabras de Itzcovich y Murúa (2018) quienes afirman que una de las finalidades del trabajo geométrico en la escuela se centra en que los alumnos produzcan relaciones que caracterizan a las figuras geométricas, identificando las propiedades que las definen, las que se verifican y su validez mediante argumentos matemáticos. Esto exige que ofrezcamos a los estudiantes oportunidades de distinguir el objeto geométrico de su representación. A propósito de estas ideas los autores plantean una "especie de paradoja", dicen ellos, que nos parece interesante para pensar las clases de geometría especialmente cuando integramos el programa GeoGebra: "por un lado, el aprendizaje de las relaciones que caracterizan a las figuras requiere de un trabajo conceptual que supere la percepción; y, por otro lado, el trabajo se apoya fuertemente en los dibujos -es decir, en representaciones- sin las cuales se ven disminuidas las posibilidades de desplegar una actividad matemática con los alumnos en torno a las figuras" (p. 74).

Por otro lado, asumimos que los software educativos orientados al área matemática pueden ser herramientas didácticas que le permiten al docente proponer situaciones de enseñanza que modifican las interacciones en el aula, generan espacios diferentes para explorar, conjeturar y demostrar propiedades de la aritmética, del álgebra, de la geometría y del análisis. En particular, GeoGebra es un programa concebido desde su diseño como herramienta didáctica, permite la exploración y la investigación como medios para aprender matemática. Es una herramienta tecnológica que abre la posibilidad de abordar problemas que serían imposibles sin su ayuda y permite adoptar un enfoque experimental de la matemática cambiando la naturaleza de su aprendizaje (Novembre, 2015 en Natale y Madrid, 2018).

Acerca del grupo colaborativo, en cuya constitución estamos trabajando, podemos decir que nos inspiran las ideas de Bednarz (2015, 2017) sobre la investigación colaborativa. Esta autora plantea que las investigaciones colaborativas surgen de una doble preocupación. Por un lado, la formación de los docentes y la necesidad de producir conocimientos pertinentes y relacionados con un cierto campo de práctica profesional y, por otro, surgen del acercamiento entre el mundo de la investigación y el de la práctica docente con el deseo de integrar el punto de vista de los docentes en la construcción de saberes ajustados a la realidad de esa práctica y tomando en cuenta su complejidad. Dos puntos de vista y dos objetivos diferentes: los docentes hacen un camino de explicitación y análisis de su práctica con el objetivo de mejorarla y los investigadores hacen de este material reflexivo un objeto de análisis para producir conocimientos nuevos en un dominio ligado a la práctica docente y más específicamente al saber de los docentes. Este encuentro entre docentes e investigadores permite crear una "zona interpretativa" compartida alrededor de la práctica que es el objeto de exploración (Bednarz en Papini, 2018).

La secuencia de problemas

Planteamos a los estudiantes los siguientes problemas en el contexto de la materia "Geometría con regla y compás", durante el año 2018.

Problema 1

a) Dado un cuadrado de lado 1, caracterizar el lugar geométrico que describe un lado del cuadrado cuando gira alrededor del centro del cuadrado.

b) Calcular el área de la corona.

El docente entregó a los alumnos este problema escrito en papel, lo leyeron en voz alta todos juntos y les indicó que podían utilizar el programa GeoGebra en forma optativa.

Problema 2

Si construimos polígonos regulares de 5, 6 o más lados que miden 1 unidad. ¿Qué modificaciones sufre el lugar geométrico caracterizado en el Problema 1?

También lo entregó por escrito y, además, les ofreció dos applets en GeoGebra elaborados específicamente para este problema.

Decidimos ofrecer estos recursos para que los estudiantes se focalicen en analizar el problema (realizar exploraciones, elaborar conjeturas y validarlas) y no en realizar las construcciones, tarea que se centra en otros conocimientos. El primer recurso, https://ggbm.at/e49ajcep, presenta tres polígonos regulares de lado 1 (cuadrado, hexágono, octógono) y el segundo, https://ggbm.at/cm5tds7b, un polígono regular de lado 1 (inicialmente un cuadrado) con una casilla de entrada que permite modificar la cantidad de lados del polígono. Ambos recursos contienen botones con distintas opciones de animación.

Breve caracterización de los problemas

Estos problemas fueron seleccionados por Mauro, integrante del equipo de estudio y docente responsable de la materia “Geometría con regla y compás”; forman parte de un conjunto de situaciones problemáticas que ha utilizado en diversos cursos de formación para docentes y esto hace que partamos de un buen conocimiento de sus potencialidades. Las resoluciones de estos problemas con GeoGebra tienen en común el uso de algunos comandos y herramientas, como *Rastro* o *Deslizador*, que son claves para poder estudiarlos, y permiten utilizar la exploración y la investigación como medios para estudiar matemática.

Mauro ya ha trabajado con su grupo de alumnos, en esta cursada, la idea de “lugar geométrico” para definir las nociones de mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo; también ha utilizado con ellos el programa GeoGebra desde el comienzo como un medio para explorar y experimentar, particularmente han utilizado el comando *Rastro* y herramientas tales como *segmento*, *segmento dada su longitud, punto medio o centro, recta, mediatriz, bisectriz, tangente, área del círculo, perpendicular, circunferencia, ángulo, distancia o longitud* y *área*. Han discutido en clase el grado de independencia o dependencia de los objetos construidos en GeoGebra.

A partir de la resolución de estos problemas pretendemos focalizar especialmente las ideas de circunferencia como lugar geométrico de puntos del plano que equidistan de un punto fijo, diámetro y radio de una circunferencia, propiedades del cuadrado, propiedades de las rectas tangentes a una circunferencia. También pretendemos reflexionar acerca de ¿qué es una conjetura? ¿Cómo validarla? ¿Se puede validar de distintas maneras? ¿La validación empírica alcanza? ¿Qué condiciones para que una propiedad se pueda generalizar? ¿Cómo es el proceso de génesis de una demostración?

También es nuestro propósito llevar a la clase ciertos tipos de tareas en las que la utilización del programa GeoGebra potencie el trabajo matemático de los alumnos.

La construcción colaborativa de la secuencia de problemas para el aula

Como mencionamos, nuestros intereses también incluyen la conformación de un grupo colaborativo que se propone aprender sobre la práctica docente y producir conocimientos en relación con estos aprendizajes. El grupo está integrado por siete profesores de matemática y nuestra primera tarea fue estudiar los problemas propuestos por Mauro, resolverlos en lápiz y papel y en GeoGebra. Discutimos luego, a modo de anticipaciones, los posibles caminos de resolución que pueden producir los alumnos.

Realizamos este trabajo en tres reuniones previas a la puesta en el aula, entre septiembre y octubre de 2018, recorrimos diversas temáticas que fueron surgiendo en las discusiones y también acordamos sobre distintos aspectos.

Mencionamos a continuación algunas de esas cuestiones sobre el primer problema:

¿Por qué el primer problema propone un cuadrado y no un triángulo equilátero? (teniendo en cuenta la intención de generalizar el problema para un polígono regular de *n* lados). Consideramos que es un conocimiento más disponible entre los estudiantes la propiedad de que el centro de un cuadrado, o en general de los polígonos regulares de cantidad par de lados, es la intersección de las diagonales. La situación de enfrentarse a polígonos regulares de cantidad impar de lados los ubica en una posición de incertidumbre (de hallar el centro y su distancia a los vértices) que en una primera instancia no queremos explorar. A partir de conocer características del centro del polígono, es posible calcular el radio de las circunferencias que determinan el anillo.

¿Qué implicancias tiene que el lado mida 1? ¿Por qué no elegir 2?

Si el lado del cuadrado es uno, el área de la corona coincide con el área del círculo de radio menor. Esta coincidencia puede posibilitar la elaboración de conjeturas, como por ejemplo que el área de la corona coincide siempre con el área del círculo menor.

¿Qué conjeturas habilitaría una representación en lápiz y papel?

Al rotar el cuadrado, sus vértices siguen una trayectoria circular, cuyo radio es $\sqrt{2}/2$. Suponemos que los alumnos pueden establecer esta conjetura desde una representación en lápiz y papel y vemos poco probable que produzcan otras.

¿Qué asumimos como "caracterizar un lugar geométrico"? ¿Qué interpretan los estudiantes sobre esta tarea?

Entendemos que caracterizar un lugar geométrico es dar las condiciones necesarias y suficientes que cumple el conjunto de puntos del plano en cuestión o, dicho de otro modo, expresar las características que permiten decidir si un punto del plano pertenece o no al lugar geométrico. Para nuestro caso, esperamos que los alumnos describan el lugar geométrico generado por el lado del cuadrado como una corona o región limitada por dos circunferencias concéntricas, siendo el radio mayor $\sqrt{2}/2$ y el radio menor $1/2$.

Algunos elementos para contextualizar la experiencia en el aula

Trabajamos con un grupo de cinco estudiantes de la carrera de Profesorado en Matemática en una clase de la materia "Geometría con regla y compás", correspondiente al segundo cuatrimestre del segundo año de la carrera, esta materia es la única de geometría del plan de estudios. Los alumnos han cursado previamente otras asignaturas como Informática Educativa, en la que trabajan con el programa GeoGebra, y varias del área de álgebra y análisis matemático en las que encontramos algunos contenidos de geometría analítica tales como rectas y planos en el espacio, cónicas y cuádricas.

La clase en la que pusimos en juego los problemas se realizó en octubre de 2018 cuando los alumnos estaban transitando la unidad 3: *La circunferencia*, del programa de contenidos. Ya habían trabajado alrededor de las siguientes nociones relacionadas con los problemas propuestos: ángulos en circunferencia; puntos notables de un triángulo y sus propiedades, la circunferencia inscrita y circunscrita; cuadriláteros y sus propiedades; polígonos regulares y sus propiedades; recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto exterior.

Los estudiantes se agruparon voluntariamente de a dos y un estudiante trabajó en forma individual pero en diálogo con uno de los grupos. Utilizaron tres notebooks con el programa GeoGebra.

Además de Mauro, el docente de la materia, asistimos dos integrantes del grupo para colaborar y realizar observaciones. Registramos la clase mediante grabaciones de audio, fotos de resoluciones en papel y en el pizarrón, grabamos las pantallas de las notebooks con el programa aTube Catcher y tomamos notas escritas de algunas observaciones.

Las resoluciones de los estudiantes, los intercambios entre ellos y con el docente

En este apartado y para este trabajo decidimos caracterizar el abordaje de los problemas que hizo uno de los alumnos, Gonzalo, y su interacción con el grupo de Gabriela y Carolina. Esta resolución nos parece interesante y representativa en relación con nuestros objetivos para este problema y con las anticipaciones que hicimos.

Gonzalo comienza la resolución del problema 1 utilizando una hoja en blanco en GeoGebra. Construye un segmento de longitud uno utilizando la herramienta *Segmento de longitud dada* e inspecciona por unos segundos las herramientas relacionadas con polígonos, y luego deshace todo. Interpretamos que Gonzalo pensó que no podía utilizar la herramienta *Polígono regular* teniendo un segmento construido con anterioridad.

En el segundo intento utiliza la herramienta *Polígono regular* y construye un cuadrado arbitrario (la longitud de los lados era aproximadamente 5.8), que tiene los vértices A y B libres, y su centro como intersección de las dos diagonales. Activa el rastro al segmento AB y con la herramienta *Elige y mueve*, selecciona el vértice B y lo mueve; observa que se modifica la longitud del lado del cuadrado. Borra el rastro y ahora selecciona el lado AB y lo mueve; observa que se traslada el cuadrado completo. Pero en ambos casos no logra el objetivo de rotar el cuadrado alrededor de su centro, motivo por el cual decide comenzar de nuevo, borrando la última construcción. Pretendemos profundizar en el estudio de los registros que nos muestran el recorrido que hizo Gonzalo. En un primer acercamiento podemos decir que los distintos ensayos implican aprendizajes y reflexiones tanto geométricas como del programa GeoGebra.

En su tercer intento construye una circunferencia de radio arbitrario y les dice al grupo vecino "pensé en hacer una circunferencia e inscribir un cuadrado. Por el centro pasarían las dos diagonales, perpendiculares entre sí." Para poder realizar esta construcción, Gonzalo debe reconocer algunas propiedades del cuadrado y anticipar que al rotarlo con respecto a su centro, los cuatro vértices se moverán sobre la circunferencia que circunscribe al cuadrado. También se le presenta el problema de elegir el radio de la circunferencia para que el lado del cuadrado tenga longitud 1.

Gabriela le dice: *"hacela de radio 1."* Y Gonzalo responde: *"no sirve, sería de diámetro 1...no no, de $\sqrt{2}$".* Gabriela: *"a ver...hacelo y vemos".* Y Carolina: *"vamos probando de última."*

Borra la última construcción y utilizando la herramienta Circunferencia (centro, radio) construye una circunferencia con centro en un punto arbitrario A y radio $\sqrt{2}/2$. Luego construye una recta r que pasa por A y por un punto de la circunferencia B; marca el punto C intersección entre la recta r y la circunferencia. Construye una recta s perpendicular a ésta que pase por el centro de la circunferencia A. Marca los puntos D y E intersección entre s y la circunferencia. Y por último construye el polígono BDCE y activa el rastro al lado BD. La siguiente imagen muestra la construcción final de Gonzalo.

Utilizando la herramienta *Elige y mueve*, selecciona el vértice B y lo mueve. Dice: *"me queda un anillo formado por dos circunferencias, una inscrita y otra circunscrita al cuadrado"*.

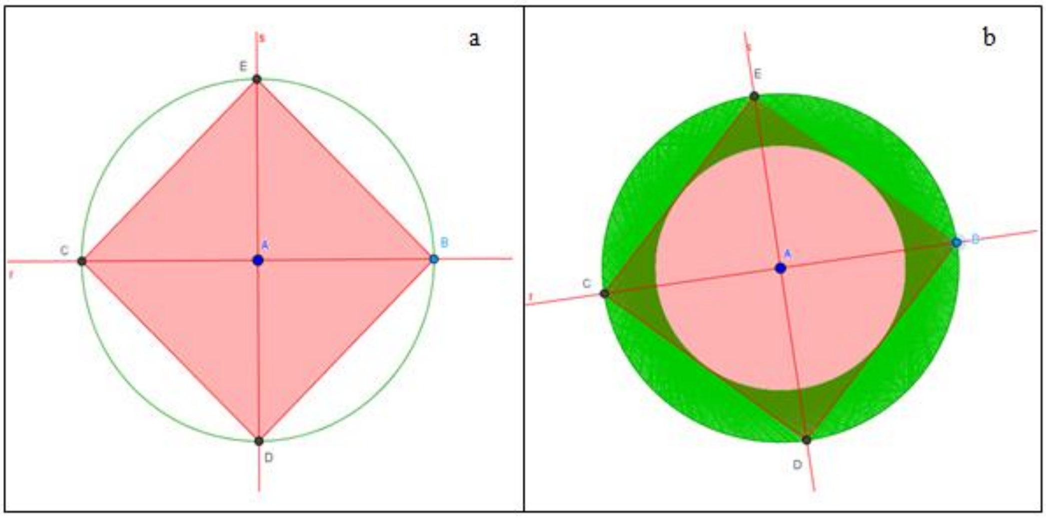

Figura 1: Construcción realizada por Gonzalo. a: Construcción final del problema 1. b: Lugar geométrico generado por un lado del cuadrado.

Gabi le pregunta: *"¿Qué es un anillo?"* Y Gonzalo responde: *"Un círculo al que le sacas otro círculo que tiene el mismo centro y radio menor"*.

Si bien Carolina y Gabriela realizaron su construcción siguiendo los pasos de Gonzalo, una vez construido el cuadrado no podían hacer que éste rote. Gonzalo intenta ayudarlas y les dice: *"Les tiene que quedar un punto celeste sobre la circunferencia. Es fundamental para poder rotar el cuadrado…"*. En esta interacción los alumnos dialogan sobre la independencia o dependencia de los objetos construidos en GeoGebra; mientras que Gonzalo reconoce que uno de los vértices del cuadrado tiene que ser construido como punto en objeto y tiene que tener cierto grado de libertad, Gabriela y Carolina no. Si bien los alumnos han escuchado sobre esta idea en su trayectoria previa, comprobamos que no tiene sentido para ellos hasta que no la requieren en las construcciones. Este hecho aporta a la concepción de que el aprendizaje de GeoGebra no ocurre de forma independiente al aprendizaje de matemática.

Con respecto al estudio del área del lugar geométrico, los tres alumnos trabajan juntos y la calculan restando el área del círculo mayor y del círculo menor, obteniendo $\pi/4$ unidades cuadradas y descubren que el anillo tiene la misma área que la circunferencia inscrita en el cuadrado.

Algunos elementos de las discusiones colectivas con los estudiantes

Comienzan la puesta en común del problema 1 compartiendo las maneras de estudiarlo que desplegó cada grupo y luego la caracterización del lugar geométrico que generaba el lado del cuadrado. Todos observaban en la construcción realizada con GeoGebra que el lugar geométrico era "un anillo" o "una corona" con radio mayor $\sqrt{2}/2$ y radio menor $1/2$, pero les fue difícil despojarse de argumentos visuales como por ejemplo "vemos que los vértices del cuadrado se mueven en una circunferencia". En consecuencia, propiciamos debates relacionados con cuestiones tales como: ¿Por qué los cuatro vértices del cuadrado se mueven en una circunferencia de radio $\sqrt{2}/2$? ¿Por qué la corona queda limitada en el interior por una circunferencia que es tangente a los cuatro lados y de radio $1/2$? ¿Se cubre completamente la corona? o lo que es similar ¿Si se toma un punto arbitrario de la corona, este se corresponde con un punto del lado que rota?

Observamos que el concepto de rotación como movimiento rígido no era puesto en duda o cuestionado por los estudiantes. Por ejemplo no se preguntaban si el lado conservaba su longitud luego de ser rotado.

Antes de que los alumnos exploren los recursos o applets propuestos para estudiar el problema 2, el docente les pide que conjeturen sobre lo que sucederá con el lugar geométrico generado por el lado cuando se modifique la cantidad de lados del polígono regular que rota. Registramos estas conjeturas en el pizarrón y luego les pedimos que las validen o refuten.

Durante la fase de exploración con los recursos GeoGebra surgieron nuevas conjeturas, que se incorporaron a la lista. Algunos de los alumnos también estaban interesados en ver qué sucedía si le cambiaba la longitud del lado. En este momento se dio una discusión grupal relacionada con ¿cómo generalizar cuando hay varias variables para modificar? ¿Es aconsejable modificar simultáneamente más de una variable?

A continuación listamos las conjeturas elaboradas por los estudiantes; algunas de ellas se contradicen pues fueron propuestas por distintos alumnos.

1. El lugar geométrico generado por un lado de un polígono regular cuando éste rota con respecto a su centro es siempre una corona.
2. Al aumentar la cantidad de lados disminuye el área de la corona.
3. El área de la corona para el caso del polígono regular de n lados es π/n unidades cuadradas.
4. El área de la corona es igual al área del círculo de radio menor.
5. El área de la corona no cambia y vale $\pi/4$ unidades cuadradas.
6. La proporción entre el área del círculo de radio mayor y de radio menor es constante cuando n cambia.

Para contrastar estas conjeturas los alumnos utilizaron la herramienta *Área* y algunos de los grupos utilizaron la vista *Hoja de Cálculo.*

Un ejemplo del proceso de validación de una conjetura

A continuación describimos las acciones que realizó Gonzalo para validar o refutar la conjetura 6. Elegimos nuevamente la producción de este estudiante porque creímos oportuno completar su recorrido en esta experiencia y porque su producción nos sigue resultando rica en ideas.

Gonzalo trabajó únicamente con el recurso 1 pero en algunas ocasiones dialogó con el grupo vecino que eligió explorar el recurso 2; al utilizar la animación identificó que el lugar geométrico para los tres casos es una corona y construyó los círculos que las limitaban. Habilitó la vista *Hoja de Cálculo* y armó la siguiente tabla, valiéndose de la interacción entre las distintas vistas y las funciones de la planilla de cálculo:

Tabla 1: Datos de la vista Hoja de Cálculo

	Inscrita	Circunscrita	Proporción
Cuadrado	0.79	1.57	2
Hexágono	2.36	3.14	1.33
Octógono	4.58	5.36	1.17

En este punto, Gonzalo manifiesta *"...no se cumple la conjetura 6, pero pude comprobar la conjetura 2, porque la proporción entre el área del círculo de radio mayor y el del radio menor disminuye, significa que el área del círculo de radio menor se acerca al de radio mayor, por lo que la diferencia entre ambas áreas disminuye".* En ese momento el docente le propone que agregue una columna en la que calcule el área de las coronas. Al hacerlo obtuvo que todas tenían área 0.79 unidades cuadradas, y dice: *"Ah mirá, se mantuvo el área. Entonces me confundí en lo que dije. Pero tengo que ver por qué pasa. Se pasó rápido el tiempo. Parece increíble que algo tan simple se le pueda dar tanta vuelta".*

Gonzalo utiliza las herramientas que le ofrece GeoGebra para realizar modificaciones en el recurso al servicio de sus ideas. También conoce las posibilidades de articular las distintas zonas de trabajo o vistas que ofrece el programa, y las aprovecha para realizar su exploración. Encuentra razones empíricas para refutar la conjetura 6 y plantea un argumento erróneo, para validar la conjetura 2, que contiene una nueva conjetura. Dice: *como la proporción entre el área del círculo de radio mayor y el del radio menor disminuye, esto implica que el área del círculo de radio menor se acerca al área del círculo de radio mayor y por lo tanto la diferencia entre ambas áreas disminuye*. Esta nueva conclusión se ve reforzada por la imagen que se observa en la pantalla, que muestra una corona cada vez más angosta cuando aumenta el número de lados.

Luego con la ayuda del profesor, logra refutar empíricamente la conjetura de que el área de las coronas disminuye al aumentar la cantidad de lados del polígono regular, y esto provoca una contradicción con una idea fuerte que tiene y que puede apoyarse en la visualización dinámica de las figuras. Esta escena nos resulta muy interesante, enfrentarse con esta situación particular puede propiciar la desconfianza en argumentos visuales y generar la necesidad de buscar otros argumentos matemáticos.

En el argumento que elabora Gonzalo antes de la intervención del docente, hay un tema que creemos que merece reflexión colectiva en el aula para futuras clases: *la proporcionalidad entre las áreas versus la diferencia entre las áreas*. Gonzalo afirma que si la proporción entre las áreas del círculo de radio mayor y el de radio menor disminuye al aumentar la cantidad de lados, entonces el área de la corona también debe disminuir.

Si bien durante la clase Gonzalo logró contrastar su primera idea, no tuvo tiempo para elaborar un argumento formal. Durante la clase siguiente, los alumnos trabajaron con el docente para probar de manera algebraica (usando algunas relaciones trigonométricas básicas) que la resta de las áreas es independiente del número de lados.

Palabras finales y algunas líneas para seguir estudiando

Consideramos que esta experiencia de trabajo resultó productiva en distintos sentidos, para todos los participantes y en todo el recorrido. El trayecto colaborativo, que realizamos como equipo de docentes, nos dejó aprendizajes tanto matemáticos como didácticos. La oportunidad de resolver en forma conjunta problemas geométricos, en lápiz y papel y con GeoGebra, no es habitual, solemos trabajar en forma solitaria, sin el apoyo y las ideas de los otros colegas. Las anticipaciones sobre la puesta en el aula de universidad de estos problemas, la participación en la clase y los análisis posteriores nos permiten reflexiones didácticas en un contexto en el que tampoco son habituales.

El cambio de dinámica de trabajo en la clase también generó un entusiasmo diferente en los alumnos, entusiasmo que se propagó en el tiempo restante de la cursada. En el comienzo de la clase estudiada los estudiantes se mostraron desorientados, no entendían bien qué esperábamos de ellos, no es una práctica habitual que se les de espacio para explorar, para conjeturar y luego demostrar o no esas conjeturas. Incluso observamos que la tarea de proponer argumentos en favor de una respuesta propia les resultaba extraña o ajena al tipo de tareas acostumbradas. En las clases sucesivas, Mauro notó un posicionamiento distinto de los estudiantes frente a las tareas, se permitían dudar de las "apariencias" de las figuras, buscaban otros argumentos.

A partir de esta primera etapa exploratoria nos proponemos profundizar en el análisis de los registros que obtuvimos. Nos interesa, en particular, focalizar sobre el proceso de elaboración de conjeturas y de producción de argumentos para validarlas o refutarlas y, en este sentido, nos preguntamos qué aspectos o características de los problemas favorecen las habilidades para conjeturar y validar, qué lugar tuvo el programa GeoGebra en esta experiencia y cómo podemos incluirlo en los exámenes de la materia para que sean consistentes con estas actividades del aula, cómo podemos caracterizar la discusión colectiva en la que los alumnos producen en forma explícita las conjeturas, cómo trabajar la producción de textos en lenguaje natural para que las conjeturas sean cada vez más claras, qué otros problemas podemos incluir para extender este tipo de tareas a otros contenidos de geometría.

Referencias bibliográficas

Bednarz, N. (2015). La Recherche Collaborative. Entretien réalisé par Jean-Luc Rinaudo et Éric Roditi. *Carrefours de l'éducation*, N°39, 171-184.

Bednarz, N. (2017). *Conferencia inaugural EDIMAT 2017. Parte 1: De la entrada en la investigación al análisis: la investigación colaborativa-en-acción sus características, sus exigencias, sus aportes*. VIII Escuela en Didáctica de la Matemática, Universidad Nacional del Comahue, Río Negro.

Itzcovich, H., & Murúa, R. (2018). GeoGebra: «nuevas» preguntas sobre «viejas» tareas. *Yupana*, (10), 71-85.

Natale M.; Madrid A.P. (2018). *GeoGebra: una posibilidad para resolver nuevos problemas*. Memorias de la VII Reunión Pampeana de Educación Matemática. Santa Rosa, Argentina.

Papini, M.C. (2018). *Una mirada desde la perspectiva de la investigación colaborativa de un proceso de investigación en marcha*. Memorias de la VII Reunión Pampeana de Educación Matemática. Santa Rosa, Argentina.