

Análisis de las praxeologías relativas a la enseñanza de los números racionales

René Arturo Gutiérrez^(1, 2), Viviana Angélica Costa^(3,4,5)

¹ ESST N° 1, “Alte. Ramón González Fernández”, Punta Alta, Provincia de Buenos Aires.

² ESS N° 1, “Ing. Luis Luiggi”, Punta Alta, Provincia de Buenos Aires.

³ IMApEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP, Provincia de Buenos Aires.

⁴ NIEcyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN, Provincia de Buenos Aires.

⁵ vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen

En este trabajo se ensaya la descripción de las praxeologías que se ponen en juego para la enseñanza de los Números Racionales en la escuela primaria (5to- segundo ciclo) y en la escuela secundaria (2do y 3er - ciclo básico) pertenecientes a la Provincia de Buenos Aires. El mismo es parte de un estudio más amplio que fue presentado para acceder al título de Licenciatura en Ciencias de la Educación en Matemática, en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. El conocimiento de las praxeologías permitiría comprender cómo y cuándo se enseñan los Números Racionales en esos niveles educativos y formular hipótesis de las causas de las dificultades encontradas en el aprendizaje de estos saberes por parte de los alumnos. Además, la descripción de las praxeologías se convertiría en un punto de partida para generar otras investigaciones que profundicen este, u otros, aspectos vinculados a la enseñanza y aprendizaje de los Números Racionales. Para el desarrollo del trabajo se utiliza como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Yves Chevallard.

Palabras clave: números racionales; enseñanza; praxeología; diseño curricular.

Introducción

Numerosas son las investigaciones que vislumbran la problemática existente en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en especial en el nivel primario y secundario, respecto al estudio del conjunto de los Números Racionales (NR en adelante) y sus operaciones básicas. Las dificultades en el aprendizaje de los NR se deben a variadas situaciones y así lo manifiestan varios investigadores que además proponen diversas estrategias para su estudio.

Obando (2003) menciona que la fracción como relación parte-todo fundamentado en los aspectos relacionados con la medida, el tipo de magnitud y el tipo de unidad, permitiría desarrollar en los alumnos procesos de aprendizaje constructivos y autónomos, en lo relativo a las relaciones de orden, relación de equivalencia y la operación aditiva en los NR. Benetti, Menichelli, Ronchese, Cismondi, y Oliva (2015) mencionan que hay pocos intentos de vincular la noción de fracción con otros temas matemáticos, muchas veces se la concibió como expresión de una parte perteneciente a un todo, esto da lugar a que el aprendizaje sea como un concepto aislado y sin funcionalidad. Real y Figueras (2015) exponen que algunos libros de textos no consideran algunas clases de fenómenos tales como: descripción de procesos cíclicos y periódicos; descripción de razones, comparación de cantidades y valores de magnitud a través de expresiones que se usan en el lenguaje cotidiano, comparación directas de objetos; y la medición de magnitudes usando la recta numérica. Luelmo Livas (2004) considera que para un conocimiento adecuado de la estructura de los NR se requiere conocer todos los significados que puede tener: como medida, cociente, razón y operador multiplicativo. Además, algunos investigadores hacen referencia a los errores cometidos por los alumnos en tareas que involucran operaciones con NR y en como la identificación de tales errores podría colaborar en mejorar el proceso de aprendizaje, siempre y cuando luego se traten y se corrijan. González del Olmo (2015) categoriza los errores cometidos por los estudiantes, clasificando los más importantes y comunes apreciados:

- Errores por descuido o distracción.
- Errores por el desconocimiento de las respuestas que pueden ser: simplificación incompleta, operaciones con enteros y errores en la jerarquía de las operaciones.

- Errores por defecto en la comprensión del concepto que pueden ser: error en aplicación de las propiedades de las operaciones, error en el orden de las fracciones, no considera legítimo dividir o restar un número menor por un número mayor, relacionar multiplicar con ampliar y dividir con simplificar, extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones y error relacionado con las equivalencias de fracciones.

Por otro lado, Río Serna y Ramírez Pérez (2009), mencionan que algunas dificultades que presentaron los alumnos de la educación primaria en relación al aprendizaje de las fracciones se deben a la dificultad para abstraer este objeto mental. Esto les dificultaría la comprensión, al momento de operar con sumas y restas (falta de aplicación de conocimientos anteriores como el M.C.M y el M.C.D), encontrar fracciones equivalentes y vincular las fracciones en otro contexto. Por otro lado, Juárez y López (2016), identifican errores que cometen un gran número de estudiantes (México) al realizar operaciones básicas con NR. Al sumar fracciones, suman directamente los numeradores y por otro lado los denominadores, o aplican incorrectamente las técnicas para la adición.

En resumen, este trabajo pretende hacer un aporte a esta problemática desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, describiendo y analizando las *praxeologías* entorno al estudio de los NR y sus operaciones básicas, en los niveles de educación primaria y secundaria básica de la Provincia de Buenos Aires.

Las preguntas que guiarán la investigación son:

- ¿Cuáles son las *praxeologías* que se proponen estudiar en el Diseño Curricular de la provincia de Buenos Aires para la enseñanza de los Números Racionales en sus escuelas?
- ¿Cuáles son las *praxeologías* que desarrollan algunos libros de texto para la enseñanza de los Números Racionales en escuelas en la Provincia de Buenos Aires?

Marco teórico

El trabajo de investigación se apoya en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Según Chevallard (2013), lo didáctico es una dimensión vital de las sociedades humanas, decir esto en forma simplificada, en una serie de situaciones sociales, que alguna persona haga algo o tenga intenciones de hacer hacerlo, para que otra persona pueda estudiar y

aprender algo. El postulado de la TAD se basa que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra praxeología. La Praxeología Matemática u Organización Matemática (OM) se refiere a la realidad matemática que puede construirse, es decir la manera en que puede realizarse el estudio de un tema. Esta noción permite considerar al mismo tiempo y, con la misma relevancia la dimensión teórica como la dimensión práctica del saber. Las OM son el resultado final de una actividad matemática, en la cual es posible distinguir dos aspectos inseparables:

- El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que engloba, por un lado, un cierto tipo de *tareas* y cuestiones que se estudian, y por otro, las *técnicas* para resolverlos.
- El nivel del *logos* o del *saber*, se encuentran los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, esto es, la *tecnología*. Un segundo nivel de descripción, explicación, justificación (esto es, el nivel tecnología de la tecnología) se denomina *teoría*.

Metodología

La metodología a utilizar es descriptiva y permitiría guiar la investigación para dar respuesta a las preguntas propuestas en el marco de la TAD. La descripción se realiza a partir de observar e identificar las *praxeologías* que se ponen en juego para el estudio de los NR en el segundo ciclo de Escuela Primaria (EP) y en el primer ciclo de la Escuela Secundaria (ES) de la Provincia de Buenos Aires. Para ello se seleccionaron dos escenarios distintos: los Diseños Curriculares de la Provincia de Buenos Aires para ambos niveles educativos (EP y ES) y algunos libros de texto de 6° año de EP y, de 2° y 3° año de ES. La observación se realiza desde una visión global, de cómo se presentan los *saberes* y *saber-hacer* relativos a los NR, identificando los tipos de *tareas*, *técnicas*, *tecnologías* y *teoría*, que se utilizan para ello. Esto abarca también, sus representaciones, propiedades y operaciones básicas. El criterio de selección de los libros de texto fue teniendo en cuenta los autores o editoriales más representativos para los docentes de los niveles de EP y de ES en la ciudad de Punta Alta, Provincia de Buenos Aires (Tabla 1).

Tabla 1. Libros escolares.

Libro	Nombre	Autor	Editorial	Nivel
1	Matemática 5	Itzcovich, Becerril, Ponce, Urquiza	Tinta Fresca (2009)	EP 5 año
2	Matemática 2	Effenberger	Kapeluz (2013)	ES 2 año
3	Entre Números III	Pavicich, Jaller, Perez	Santillana (2016)	ES 3 año

Diseño Curricular: descripción

El diseño curricular propone iniciar el estudio de los NR en el segundo ciclo de la EP (año 2008), a partir de explorar diversos tipos de problemas para los cuales las fracciones son un medio de solución, por ejemplo problemas de medidas, de reparto y partición, etc. Se observa que los NR se introducen con situaciones problemáticas de la vida cotidiana con el significado de medida, reparto, proporcionalidad directa, además que involucren el uso de fracciones (medios y cuartos) en contextos particulares (repartos y medidas de peso y capacidad). Con expresiones decimales resuelven situaciones problemáticas que involucran dinero, con dos cifras decimales, además se extiende a otros contextos como es el de la medida, en el que se añaden las milésimas. El uso de la recta numérica es una *técnica* útil para analizar relaciones de orden entre los NR e identificar fracciones equivalentes. La relación entre fracciones y sus respectivas expresiones decimales es una *técnica* utilizada para explorar distintos tipos de fracciones (cantidad finita o infinita periódica de decimales).

Las *praxeologías* que hemos identificado en los Diseños Curricular para la EP (segundo ciclo) y para la ES (primer ciclo - comprende los tres primeros años - 2007) de la Provincia de Buenos Aires en torno a los NR se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2. Diseño curricular de la Provincia de BA. Números racionales.

Nivel educativo	Tareas/ Técnicas	Tecnologías/ Teoría
EP	-Resolver problemas que involucran distintos significados de las fracciones. -Resolver problemas de cálculo mental exacto y aproximado que permitan sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones decimales entre sí y con números naturales. -Operar con expresiones fraccionarias entre sí y con números naturales. -Resolver problemas que involucran relaciones de	-Noción intuitiva de NR. -Uso de la recta numérica. -Números decimales. Densidad de los NR. -Fracciones equivalentes. -Representación de fracciones. -Operaciones con fracciones y con números enteros.

	<p>proporcionalidad con números naturales y racionales.</p> <p>-Resolver problemas que involucran el uso del Sistema Métrico Legal para longitud, capacidad y peso estableciendo relaciones entre fracciones, expresiones decimales, unidades de medida y nociones de proporcionalidad.</p> <p>-Establecer relaciones entre fracciones y el cociente entre Números Naturales</p> <p>-Situaciones de reparto, medidas, pesos, dinero.</p>	<p>-Proporción, proporcionalidad directa.</p> <p>-Fracciones y sus expresiones decimales.</p> <p>-Representación en la recta numérica de las expresiones decimales</p> <p>-Propiedades para operar con expresiones decimales entre una fracción y un entero.</p> <p>- Proporcionalidad directa en los que la constante es una fracción y los valores de las magnitudes son enteros y fracciones.</p> <p>-Noción de número primo.</p>
ES	<p><i>Primer año:</i></p> <p>-Resolver problemas con NR positivos.</p> <p>-Resolver problemas usando la interpretación de NR como cociente y su expresión decimal, razón, probabilidad, porcentaje y punto en una recta numérica.</p> <p><i>Segundo año: (del año anterior se agrega)</i></p> <p>-Resolver problemas con NR negativos.</p> <p>-Discutir la división entre números enteros y la división por cero.</p> <p>-Representar en la recta numérica los NR positivos y negativos.</p> <p>-Operar con calculadora científica.</p> <p>-Calcular analítica y gráficamente con promedios sucesivos entre dos NR distintos.</p> <p><i>Tercer año: (del año anterior se agrega)</i></p> <p>-Cambios de representación de NR: fracción, expresión decimal, notación científica.</p> <p>-Extraer factores comunes de expresiones numéricas y algebraicas.</p> <p>-Redondo y truncamiento de NR.</p>	<p>-Noción de NR positivo.</p> <p>-Orden de los NR positivos y negativos.</p> <p>-Propiedades para operar con NR.</p> <p>-Distintas representaciones de los NR: fracciones, números decimales, razón, probabilidad, porcentaje y punto en una recta numérica.</p> <p>-Densidad de los NR.</p> <p>-Aproximación de NR.</p> <p>-Redondeo y truncamiento de los NR.</p> <p>-Uso de calculadora para operar con NR.</p>

Para ambos niveles se observó poca vinculación de las *tareas* propuestas para cada tema. En el diseño para la EP se observó mayor cantidad de *tareas* resultas que en el de la ES.

Libros escolares: descripción

En esta parte se describen las *praxeologías* observadas en los libros de textos seleccionados que surge de identificar en ellos los tipos de *tareas*, *técnicas* y las *tecnologías* y *teorías*, que

presentan. Para cada Texto, se resumen en una tabla las *tareas* y *técnicas* y se las vincula, mediante un número, con sus correspondientes *tecnologías* y *teorías* que las justifican.

Libro 1: Matemática 5 (EP)

Las *praxeologías* presentadas en el libro en relación al estudio de los NR se corresponden con los de la Currícula de la Provincia de Buenos Aires. El tema lo presenta en dos unidades a partir de *tareas* que consisten en resolver situaciones problemáticas contextualizadas, separando lo que es fracciones de los números decimales. Al finalizar los capítulos, se presentan secciones como: “Aprender con la calculadora y aprender con la computadora”, aplicando las *técnicas*, *tecnologías* y *teoría* desarrolladas en el capítulo y por último hay una sección con *tareas* de integración, donde se propone aplicar las *técnicas* y *tecnologías* estudiadas en el capítulo. La *teoría* la resaltan con un gráfico para destacarlo. Contiene una gran cantidad de gráficos para cada *tarea* propuesta combinando imágenes reales con dibujos de personas. Las *tareas* que predominan son la de resolver situaciones de reparto, representación de fracciones en la recta numérica, ejercicios de suma y resta y problemas de proporcionalidad, únicamente con NR positivos, tratando de contextualizar situaciones de la vida cotidiana. Las *praxeologías* identificadas en este libro se resumen en la Tabla 3.

Tabla 3. Praxeologías en torno a los NR. Libro 1: Matemática 5 (EP).

Tarea /Técnica/ (Tecnología/Teoría)	Tecnología/Teoría
-Identificar el uso de las fracciones.(1)	1-Noción de NR
-Repartir en partes iguales. (1 – 2 -3)	2-Significado de parte-todo de las fracciones.
-Representar NR en la recta numérica. (1 – 3)	3-Significado de medida.
-Ordenar NR. (1)	4-Fracciones equivalentes.
-Operar con NR positivos. Calcular sumas y restas de NR. Calcular la multiplicación y división de un NR por un entero. (1 – 4 – 5)	5-Propiedades de las operaciones con NR.

Libro 2: Matemática 2 (ES)

El libro está organizado en capítulos. En el capítulo 6 (pág.103) se inicia el estudio de los NR. Presenta primero la *tecnología/teoría* correspondiente a los NR resaltadas en recuadros. Presenta la definición de NR, las partes que componen una fracción y sus denominaciones, dándole únicamente el significado de parte-todo. A continuación relaciona la fracción con la expresión decimal. Luego presenta la clasificación de fracciones: propias,

impropias y aparentes. Continúa con fracciones equivalente y números decimales, orden de los NR y su representación gráfica. Concluye con las operaciones con fracciones: suma, resta, multiplicación y división. Luego de presentan los *saberes*, se proponen las *tareas* y las *técnicas* para resolverlas. Las praxeologías identificadas en este libro se resumen en la Tabla 4.

Libro 3: Entre Números III (ES)

Este libro está organizado en capítulos que se inician con una sección “Esto ya lo sabías...”. Son problemas de repaso para entrar en el tema. En el capítulo 1 presenta las *praxeologías* de divisibilidad de números enteros y NR. El libro presenta los temas con una gran variedad de imágenes e íconos para comentarios. La similitud con el segundo libro es que propone varias *tareas* de repetición y una sección de *teoría* y *tareas* de repaso. La diferencia que presenta es que posee una sección donde se proponen diferentes *técnicas* para resolver una misma *tarea*. También presentan ejemplos con *tareas* resueltas que poseen errores para que el alumno pueda encontrarlos. Además resulta interesante la sección donde formula *tareas* para ser resueltas con computadora y/o calculadora. Por último contiene una sección de evaluación integral de los *saberes* que se trataron en la unidad. Las *praxeologías* identificadas en este libro se resumen en la Tabla 5.

Tabla 4. Praxeologías en torno a los NR. Libro 2.

Tarea /Técnica/ (Tecnología/Teoría)	Tecnología/Teoría
-Clasificar fracciones. (1 - 2) -Representación gráfica de fracciones. (1 - 2 - 3) -Hallar fracciones equivalentes. (1 - 4) -Expresar fracción impropia a número mixto. (1 -2) -Operar con NR positivos (sumas y restas). (1 - 4 - 5)	1-Noción de NR 2-Tipos de fracciones. 3-Significado de parte-todo de las fracciones. 4-Fracciones equivalentes. 5-Propiedades de operaciones con NR.

Tabla 5. Praxeologías en torno a los NR. Libro 3: Entre Números III (ES).

Tarea /Técnica/ (Tecnología/ Teoría)	Tecnología/ Teoría
-Representar los NR. (1 - 2) -Convertir de fracción a expresión decimal (exacto o periódico) y viceversa. (1 - 4) -Operar con fracciones. (1 - 2 - 4) -Técnica para reducir a fracción irreducible. (1 - 2 - 5)	1-Definición de NR. 2-Fracciones equivalentes. 3-Representación de los NR: decimales y fraccionarios. 4-Operaciones con NR.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una descripción de las *praxeologías* en torno al estudio de los NR y sus operaciones básicas en el marco de la TAD. En los Diseños Curriculares se observó básicamente un lineamiento general de lo que debe *saber-hacer* el alumno en relación a los NR, que transita por el segundo ciclo de la EP y el primer ciclo de la ES.

En los libros analizados se observó que el tipo de *tarea* que predomina es el vinculado al significado de parte-todo. Este significado, se inicia en la EP y se continua en el ciclo básico de la ES. Contribuye a comprender la relación de orden, relación de equivalencia y la operación aditiva, sin embargo obstaculiza el estudio de los NR negativos y la operación multiplicativa. Todos los libros descriptos abarcan los *saberes* y *saber-hacer* propuestos en el Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires. Se observó además la omisión (dada su abstracción) del *saber* estricto de NR que se refiere a la definición formal como conjunto de todos los pares ordenados de números enteros mediante una relación de equivalencia. Esto es posible que provoque que las *técnicas* propuestas para resolver las *tareas*, en la mayoría de los casos, se reduzcan a “reglas” memorísticas, ya que se desconoce el *saber* que las justifica. Por ejemplo, en los libros se observó que, para realizar el cociente de NR, se propone la “regla” de efectuar el “producto cruzado”, es decir “primero multiplicar el numerador del dividendo por el denominador del divisor, este será el numerador del resultado, luego multiplicar el denominador del dividendo por el numerador del divisor, que será el resultado del denominador del cociente”. En este sentido, sería recomendable que en niveles educativos superiores se retome el estudio de los NR desde la estructura matemática que tiene este conjunto, lo que implicaría la abstracción del *saber* NR, dando sentido a la resolución de una ecuación lineal ($a \cdot x = b$, a y b números enteros con a no nulo).

En resumen este trabajo pretende ser un aporte a la enseñanza y aprendizaje de los NR desde el marco de la TAD y un punto de partida para otras investigaciones que profundicen los aspectos aquí tratados o exploren otros, de modo de comprender el fenómeno en estudio.

Referencias bibliográficas

Benetti, C., Menichelli, L., Ronchese, L., Cismondi, E., & Oliva, I. (2015). La enseñanza de los números racionales. Una experiencia de investigación en escuelas primarias y

- secundarias1 argentinas. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (44), 24-41.
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (2), 161 -182.
- DGCyE. Dirección General de Cultura y Educación Diseño Curricular para la Educación Primaria. Segundo Ciclo Volúmen 1 / Dirección General de Cultura y Educación - 1a ed. - La Plata: Dir. General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2008.
- DGCyE, Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires. http://servicios2.abc.gov.ar/recursoseducativos/editorial/catalogodepublicaciones/disenio_curricular.html
- González del Olmo, D. (2015). Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria.
- Juárez, E. C., & López, J. A. J. (2016). Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad. *Números*, 91.
- Livas, M. L. (2005). Concepciones Matemáticas de los Docentes de Primaria en relación con la Fracción como Razón y como Operador Multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación de la Universidad la Salle*, 6(24), 83-83.
- Luelmo Livas, M. (2004). Concepciones matemáticas de los docentes de primaria en relación con la fracción como razón y como operador multiplicativo. *Revista del Centro de Investigación. Universidad La Salle*, 6(22).
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista Ema*, 8(2), 157-182.
- Pérez, M. A. (2013). Una Historia de las Matemáticas: Retos y Conquistas a Través de sus Personajes. Madrid España. Editorial Visión Libros.
- Real, R., & Figueras, O. (2015, February). A network of notions, concepts and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of Didactical Phenomenology. In *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 346-353).

Río Serna, K. T. D., & Ramírez Pérez, L. M. (2009). Las fracciones a partir de la fenomenología didáctica.