

## La Visualización en Geometría Analítica como estrategia de aprendizaje

Sara González<sup>(1,2)</sup>, Viviana Bolzicco<sup>(1,3)</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación, UNLP

<sup>2</sup> [saritabety@gmail.com](mailto:saritabety@gmail.com), <sup>3</sup> [vivianabolzicco@gmail.com](mailto:vivianabolzicco@gmail.com)

### Resumen

Con el propósito de promover la apropiación de saberes geométricos y su circulación entre pares para interpretar la realidad desde otros puntos de vista; presentamos una propuesta didáctica que explicita una forma analizar el desarrollo de competencias geométricas y comunicativas en alumnos ingresantes a 1er. año del Profesorado de Matemáticas de la FAHCE – UNLP. Con el fin de valorar el uso de modelos estructurales y digitales como recurso didáctico para aprender y aprender a enseñar, utilizamos la visualización; clase de actividad de razonamiento basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto a nivel mental como físico para la resolución de problemas. Desarrollamos una secuencia de actividades bajo la modalidad de taller, involucrando aspectos del saber y del saber aplicar conocimientos matemáticos asociados a competencias geométricas y comunicativas que permiten mostrar matices sobre la confrontación de ideas y la toma de decisiones durante el análisis y resolución de situaciones problema. Para su evaluación aplicamos el registro anecdótico y una matriz valorativa. Trabajamos durante los ciclos lectivos 2016 a 2018 con un total de 60 alumnos todos pertenecientes a la cátedra de Geometría Analítica correspondiente al 1er año del Profesorado de Matemáticas de la FAHCE de la UNLP.

**Palabras claves:** competencias geométricas y comunicativas; modelo estructural/digital; resolución de problemas; auto y co evaluación.

## Introducción

La formación docente para desempeñarse en una realidad tan diversa debe ser diferente, no sólo en los contenidos programáticos sino en propiciar la apropiación de nuevas competencias de socialización y de desarrollo personal. Sumado a esto, la disponibilidad de nuevos recursos tecnológicos de comunicación e información, plantea el imperativo de un cambio educacional en el nivel de la enseñanza superior.

En relación con los requerimientos generales que demandan los nuevos desafíos profesionales, autores como Gamboa Araya y Ballesterero Alfaro (2010) se centran en:

- Capacidad creativa, de trabajo autónomo, espíritu emprendedor y condiciones para la adaptación a situaciones emergentes.
- Desarrollo de la potencialidad para estar constantemente actualizándose.
- Competencias para trabajar en grupos de carácter interdisciplinario, incluyendo las potencialidades comunicacionales que da el manejo de herramientas informáticas y el dominio tanto del idioma materno como de otros idiomas universales
- Habilidades para identificar, procesar y utilizar información relevante en el momento oportuno.

En este contexto *la formación personal, la formación para la producción y el trabajo y la formación para vivir en sociedad* son tres ejes fundamentales de cualquier acto educativo que se realice en la educación superior en general y en la universitaria en particular.

-*La formación personal* está asociada a la capacidad que pueda alcanzar el individuo para actuar en su mundo con autonomía, para crecer permanentemente a lo largo de la vida en el plano físico, intelectual y afectivo.

-*La educación para la producción* no puede confundirse con la preparación para ocupar un puesto de trabajo, sino al conjunto de habilidades para desempeñarse en la generación de los bienes materiales o intangibles que requiere la sociedad. Por tanto, forman parte de este conjunto las capacidades tecnológicas, el desarrollo emprendedor, las habilidades intelectuales que requiere la producción moderna, los hábitos de cumplimiento y desempeño laboral, y la capacidad para ser reflexivo y crítico frente a la práctica productiva, de modo de aprender constantemente de la experiencia, lo cual a su vez está asociado a un proceso de actualización permanente.

*-La formación social* está asociada al comportamiento en los diversos niveles de grupos con los cuales debe interactuar la persona a lo largo de su vida. Estos van desde las funciones familiares y desempeño doméstico hasta los compromisos de participación social, de comportamiento solidario y de formación ciudadana y para la participación en la comunidad.

Bajo este encuadre, la presente propuesta presenta una forma de evaluar el desarrollo de competencias geométricas y comunicativas en estudiantes del profesorado de matemáticas, mediante el uso de modelos estructurales y digitales para la resolución de problemas.

#### *Contenidos*

- Lugares Geométricos en distintas dimensiones.
- Expresiones algebraicas para lugares geométricos en el plano y el espacio.
- Cuestiones cotidianas resueltas mediante la geometría analítica.

#### *Propósitos*

- Presentar cuestiones geométricas que permitan valorar el uso de modelos estructurales y digitales como recurso didáctico.
- Promover la apropiación de saberes geométricos para interpretar la realidad desde diferentes puntos de vista.

#### *Objetivos*

- Analizar ventajas y desventajas del uso de modelos para visualizar lugares geométricos en el plano y en el espacio.
- Analizar las ventajas y desventajas del uso de modelos como recurso para la construcción de ecuaciones de objetos geométricos en el plano y en el espacio.
- Analizar las ventajas y desventajas del uso de modelos como soporte para enunciar y resolver ejercicios, cuestiones y/o problemas que apliquen a ellos.

### **Marco teórico**

Según diversos autores, en particular Miguel de Guzmán (1996), la visualización está estrechamente relacionada con la adquisición de la intuición de lo abstracto.

A finales del siglo XX, con la aparición de los ordenadores, aparece una nueva noción de visualización relacionada con las herramientas para interpretar datos de imágenes y

para generar imágenes a partir de datos multidimensionales. Las visualizaciones externas pueden amplificar o reforzar la cognición (Sainz López, 2014).

Para este trabajo, consideramos que la visualización representa una tarea del proceso comunicativo, porque a través de ella se transforman datos abstractos y fenómenos y por lo tanto, supone una nueva vía de descubrimiento de conocimiento.

### **Metodología de trabajo**

Al considerar como principal objetivo la comprensión y resolución de cuestiones geométricas que permitan valorar el uso de modelos estructurales y digitales como recurso didáctico a partir de la interrelación entre los docentes y los alumnos, este trabajo se realizó desde el paradigma cualitativo (González, 2013) y con un carácter interpretativo (Gutiérrez, 1999). En este trabajo la muestra fueron grupos de estudiantes con el que se realizó un estudio de casos. Este método es característico del paradigma cualitativo.

La toma de datos para detectar el proceso de reflexión de los estudiantes se hizo durante un proceso de observación participante. También se recogieron y analizaron las producciones de los estudiantes. Para llevar a cabo la necesaria triangulación (Cohen y Manion, 1989) se dio la presencia de dos observadores en algunos momentos del proceso. Esto generó una doble recogida de datos empleando dos instrumentos: el registro anecdótico y matrices de observación cumplimentadas por los observadores. Posteriormente, se realizó un análisis de contenido de los documentos señalados. En la Tabla 1 se presentan los instrumentos de recogida de información diferenciando su origen.

### **Actividades grupales**

#### **A - El modelo fiambbrero**

- 1.- a) Consensuar características del modelo, estableciendo pautas y restricciones para su uso.
- b) A partir de la unidad de medida establecida, determinar las coordenadas de puntos relevantes en el modelo. Representarlo gráficamente.
- 2.- a) Hallar las ecuaciones de las rectas que delimitan el rectángulo central. Representarlas gráficamente.
- b) Calcular el valor del área del rectángulo central.

3.- a) Argumentar si el rectángulo determinado por los puntos relevantes, exteriores al rectángulo central, representa una ampliación del mismo.

b) Hallar la forma segmentaria de la ecuación de la recta que contiene a la diagonal principal del rectángulo central.

4.- a) Elegir 3 puntos no alineados  $P_1, P_2, P_3$  distintos del  $P(0,0)$  y construir 3 vectores  $V_1, V_2, V_3$  donde el origen y el extremo de cada uno sea uno de los puntos elegidos.

b) Calcular el área entre vectores Graficar.

c) ¿Por qué no es calcular el producto mixto de los tres vectores?

5.- a) Expresar la valoración del modelo como recurso didáctico.

b) Indicar otras aplicaciones del modelo, acompañar con ejemplos.

### **B – Modelando el paisaje**

Estos talleres centran su objetivo en apartar la visión estática de la generación de las cónicas y cuádricas, obteniendo su dibujo y propiedades a partir de movimientos, utilizando la técnica de plegado y modelado en plastilina.

#### *Taller de Plastilina:*

Propuesta:

1) Organizados en grupos de no más de 4 integrantes, construyen un cono circular recto, lo unen con el de otro grupo y realizan cortes con el cutter a distintos ángulos.

2) Prosiguen con la secuencia de actividades indicadas en la propuesta.

3) Comparan y analizan los trazados obtenidos con el resto de los grupos.

4) Analizan la experiencia como producción compartida e individual: qué se hizo, qué se obtuvo, qué obtuvieron otros compañeros, qué deberíamos, como grupo, haber modificado, qué aporte, como integrante de mi grupo, podría haber realizado.

5) Devolución valorativa de las docentes sobre las producciones individuales y grupales.

#### *Taller de plegado:*

Propuesta:

1) Organizados en grupo, siguen las secuencias de plegado indicadas en la propuesta, sin conocer a priori la cónica resultante.

- 2) Obtenidas las cónicas - luego de una serie de plegados - como envolventes de tangentes; realizan diferentes mediciones conducentes a hallar la propiedad que cumplen los puntos pertenecientes a ellas.
- 3) Entre los grupos intercambian resultados y opiniones, los exponen y realizan una síntesis del taller en cuanto a la experiencia en sí, y a las vivencias experimentadas, los aportes que pudieron apreciar y los que ellos harían.
- 4) Devolución valorativa de las docentes sobre las producciones individuales y grupales.

### **C. – Conjugando ideas**

Propuesta de armado de superficies cuádricas

- 1.- Organizados en grupos recorren la ciudad identificando y ubicando objetos y construcciones que representen secciones cónicas y superficies cuádricas. Se eligen algunas y sacan fotos.
- 2.- Cada grupo elige una sección y una superficie. Realiza su análisis a escala para luego poder construir su croquis y la expresión algebraica que la caracteriza.
- 3.- Cada grupo elabora una síntesis de la experiencia que contenga apreciaciones acerca de: sensaciones y sentimientos compartidos durante el proceso, obstáculos superados y no superados, estrategias de producción, valoración de la experiencia, recomendaciones para su reproducción con otros grupos en el futuro.
- 4.- Cada grupo presenta su producción y valoración al resto de los protagonistas de la experiencia.
- 5.- Devolución valorativa de las docentes sobre lo producido en forma grupal e individual.

### **Evaluación**

La evaluación será cualitativa grupal. Se utilizarán como instrumentos, el registro anecdótico y una matriz valorativa (Tabla 1), adaptación de Murillo y Marcos (2009). La matriz cierra con una nota numérica individual.

Tabla 1: Matriz valorativa

		Categorías de análisis		
Componente	Indicador	Siempre	A veces	No lo logra
<b>1ra. Transformación</b> Modelización del problema	¿Es capaz de convertir un enunciado en una configuración			
<b>Transferencia</b> Resolución del problema dentro del modelo	¿Es capaz de aplicar estrategias necesarias para resolver el problema			
<b>Metacognición</b> Reflexión y control sobre el proceso de resolución	¿Es capaz de controlar proceso de resolución y reflexionar sobre él?			
<b>2da. Transformación</b> Codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado	¿Es capaz de comunicar acerca del modelo y de los resultados dando una solución al problema propuesto?			

## Resultados

Tabla 2: Matriz valorativa cargada

		Categorías de análisis		
Componente	Indicador	siempre	a veces	No lo logra
<b>1ra. Transformación</b> Modelización del problema	¿Es capaz de convertir un enunciado en una configuración		X X X	
<b>Transferencia</b> Resolución del problema dentro del modelo	¿Es capaz de aplicar estrategias necesarias para resolver el problema		X X X	
<b>Metacognición</b> Reflexión y control sobre el proceso de resolución	¿Es capaz de controlar proceso de resolución y reflexionar sobre él?	X	X X	
<b>2da. Transformación</b> Codificación e	¿Es capaz de comunicar acerca del modelo y de los	X	X	

interpretación de la solución en el contexto del enunciado	resultados dando una solución al problema propuesto?	X		
--	--	---	--	--

X 2016

X 2017

X 2018

El modelado, sin conocer a priori el tipo de cónica a generar, permitió visualizar, forma, elementos característicos y propiedades de secciones cónicas, que de otra manera serían impuestos. Obtenidas a partir de allí las expresiones matemáticas que describen cada tipo de cónica, y por medio de un acercamiento diferente y tangible a estas entidades geométricas, los alumnos fueron capaces de modelizar objetos de la vida real, ajustando su forma a las secciones cónicas y superficies cuádricas trabajadas utilizando un abordaje diferente.

### Conclusiones

Los resultados indicaron, que las competencias geométricas y comunicativas, son valoradas y superadas a partir de la auto evaluación y co evaluación entre pares; y que el uso de modelos estructurales y digitales representan un recurso didáctico valioso para enseñar a aprender y enseñar a enseñar desterrando una vez más conjeturas como “solo con regla y compás se puede graficar ángulos rectos y rectas perpendiculares”.

Por otro lado, si bien es sabido que el pensamiento abstracto está desarrollado a esta altura, y podría tomarse como punto de partida la definición de cada cónica en particular y el enunciado de sus propiedades, para después proceder a su trazado e identificación de sus elementos, el hecho de incorporar el tipo de actividades descriptas, hace que - en el caso del estudio de cónicas y cuádricas – no se pierda la idea de tener un punto que se mueve cumpliendo una determinada propiedad y generando una determinada trayectoria.

Los elementos característicos y propiedades logran comprenderse mejor si se conserva esta idea de movilidad.

Sumado a lo expuesto, con este tipo de actividades, es posible acercar a los alumnos a interpretar objetos de la naturaleza en términos geométricos y de esta forma modelizarla; incorporando el concepto de “modelo geométrico”; que posibilitará la

discusión de limitaciones en cuanto a no ser una representación exacta de la realidad, pudiendo extenderse esto a otras áreas del conocimiento.

### **Reflexión final**

La instancia inicial del ingreso a una carrera docente está llena de incertidumbres que se van desvaneciendo mediante la comunicación entre pares y la interacción docente-alumno, la exploración y creatividad.

Por tanto, la experiencia vivida nos permite afirmar que la visualización consiste en la creación de representaciones visuales con la finalidad de comprender las relaciones que se dan en un contexto particular, puesto que a partir del pensamiento y el razonamiento se comprende mejor el mundo externo y en particular los contenidos de la geometría analítica, considerados por la mayoría de los estudiantes como abstractos e incomprensibles.

### **Referencias bibliográficas**

- Gamboa Araya, R.; Ballesteros Alfaro, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare* Vol. XIV, N° 2, [125-142], ISSN: 1409-42-58, julio-diciembre, 2010. Costa Rica.
- Godino, J.; Rivas, M.; Castro, W.; Konic, P. (2008). *Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de Matemáticas*. Actas de las VI Jornadas de Matemática Región de Murcia. Centro de Profesores y Recursos Murcia.
- González, S. (2013). *La Geometría ideada y construida*. II Simposio de Matemática, Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. UNLP, 30 de noviembre de 2013.
- González, S. (2018). *Evaluación de competencias geométricas en alumnos ingresantes al Profesorado de Matemáticas de la FAHCE – UNLP*. Comunicación presentada en las Primeras Jornadas de Práctica Profesional Docente en los Profesorados Universitarios en Matemática. Universidad Nacional de Rosario.
- Gutiérrez, C. L. (2002). *Didáctica de la matemática para la formación docente*. Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de

Educación Primaria o Básica, Volumen 22 primera edición, Cartago, Costa Rica,  
Impresora Obando.

Guzmán, M. D. (1996). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*. Madrid: Pirámide.

Murillo, J.; Marcos, G. (2009). Un modelo para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), pp. 241 – 256. España.

Sainz López, O. (2014). *La visualización en geometría*. Facultad de Educación. España.

Peñas, M. y Flores, P. (2008). Modo de uso del conocimiento profesional en procesos de reflexión en la formación inicial de profesores de matemáticas. *PNA*, 3(1), 19-34.