"Construcciones imposibles" de cuadriláteros con GeoGebra. Una experiencia en el aula

Emanuel Borrego[1,2], **Débora Ciappina**[1,3], **Camila Médico**[1,4]

[1] I.S.F.D. y T. Nº 10, Tandil, Provincia de Buenos Aires, Argentina.
[2] leaemabor@hotmail.com
[3] ciappinadebora@gmail.com
[4] camimedico@gmail.com

Resumen
En esta presentación intentamos comunicar algunos aspectos de las producciones y discusiones de un grupo de alumnos y docentes/investigadores en un 2º Año de una Escuela Secundaria pública y periférica de la Pcia. de Bs. As. Este trabajo surge en el marco de un proyecto llamado 'Recursos para el Empoderamiento de Formadores en TIC, Ciencias y Ambiente' que depende de la facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN con el apoyo de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC). Nuestro estudio se centra en el análisis de un problema de 'Construcciones imposibles' de cuadriláteros con GeoGebra y lápiz y papel, y las discusiones y argumentos que surgen de los estudiantes en cuanto a la desigualdad triangular.

Palabras Clave: enseñanza; geometría; construcciones imposibles; GeoGebra.

Introducción

En esta presentación intentamos comunicar algunos aspectos de una experiencia que se centra en el estudio de un problema de 'Construcciones imposibles' de cuadriláteros con GeoGebra que realizamos con un pequeño grupo colaborativo desde fines de 2017 y llevamos al aula de una escuela de Tandil en junio de 2018. Elegimos esta temática porque nos interesa dar mayores espacios a contenidos geométricos en el aula que como remarcan varios autores, es poco (Broitman; Itzcovich, Parra y Sadovsky, 1998; Broitman e Itzcovich, 2009; Itzcovich, 2005; Ciappina, 2015, entre otros). También los temas de geometría parecieron propicios para incluir las TIC como herramientas de producción de conocimientos en la clase de Matemática. En este sentido, compartimos con algunos autores (Cappelletti, 2008; Bifano y Lupinacci; 2012) que las 'Construcciones Imposibles' pueden promover la argumentación en Matemática, en nuestro caso haciendo referencia a propiedades y características de las figuras geométricas involucradas, y a aprovechar las 'debilidades' del software como oportunidades para discutir conocimientos matemáticos y sobre el software en el aula (Sessa, 2015). Además, creemos que es importante 'romper' con el imaginario de que todos los problemas tienen solución y que todas las construcciones se pueden realizar.

Este trabajo surge en el marco de un proyecto llamado 'Recursos para el Empoderamiento de Formadores en TIC, Ciencias y Ambiente' que depende de la facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN con el apoyo de la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC). Algunos de los objetivos del proyecto fueron:

- Construir un espacio colaborativo con docentes del nivel secundario.
- Elaborar, en el marco de este espacio, propuestas didácticas que incluyan las TIC en el aula.
- Implementar estas propuestas en el aula, registrarlas, estudiarlas y reflexionar sobre todo el proceso.
- Generar un repertorio público con estas producciones y análisis didácticos.
- Diseñar espacios de formación continua más adaptados a las necesidades de los docentes.

Algunos puntos de partida

Posicionándonos desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), asumimos la clase como un grupo que produce conocimientos matemáticos a partir de la resolución de problemas, interacciones y discusiones en pequeños grupos y colectivas, en la que el docente *devuelve* permanentemente a los alumnos la responsabilidad de resolver las situaciones mediante sus intervenciones.

Se ha adoptado la postura de Luc Trouche (2010);

> Gueudet et Trouche (2009) proponen una definición, consideran como recurso todo lo que está disponible, lo que permite al profesor re-fundamentar su actividad, lo que abarca recursos materiales (libros de texto, software, preparaciones de cursos, recursos en línea, pizarrón blanco interactivo) y no materiales (por ejemplo las interacciones con otros profesores o con estudiantes). (…)
>
> Gueudet y Trouche (2009) consideran que estos recursos tienen un recorrido, de fases de prueba a fases de revisión. Es, decir estos múltiples recursos son recursos vivos, objeto de transacciones para profesores y alumnos.
>
> Tanto en el aula como así también fuera de ella, los recursos son transformados, modificados, asociados en el curso de procesos individuales o colectivos, en las comunidades y las instituciones. Sustancias esenciales para la documentación de los profesores, son un producto siempre en evolución (Ciappina, 2015, p. 35).

Nos centramos en el posicionamiento de Bednarz (2015, citado en Papini, 2018) respecto de lo que consideramos una Investigación colaborativa:

> Las investigaciones colaborativas surgen de una doble preocupación. Por un lado, la formación de los docentes y la necesidad de producir conocimientos pertinentes y relacionados con un cierto campo de práctica profesional. Por otro lado, surgen del acercamiento entre el mundo de la investigación y el de la práctica docente con el deseo de integrar el punto de vista de los docentes en la construcción de saberes ajustados a la realidad de esa práctica y tomando en cuenta su complejidad (p. 3).

El recurso

El problema que estudiamos y llevamos al aula es el siguiente:

a) *Construir con GeoGebra, en hoja en blanco, un paralelogramo cuyos lados midan 6 y 4 unidades y una de las diagonales mida 10.*
b) *Realizar la misma construcción con lápiz en una hoja en blanco.*

Como mencionamos en el apartado anterior, pusimos en juego este problema en un 2º Año de una Escuela Secundaria Pública suburbana de la ciudad de Tandil cuya docente es parte del grupo colaborativo. El curso está conformado por 26 estudiantes pero ese día asistieron 19. Desde el inicio del Ciclo Lectivo los alumnos revisaron, resignificaron y construyeron los siguientes contenidos geométricos: construcción de rectas paralelas y perpendiculares, triángulos (construcción y propiedades), cuadriláteros (construcción y propiedades). En algunos momentos se les propuso la exploración y utilización del software GeoGebra, algunos utilizando computadoras aunque la mayoría de los estudiantes trabajaron con los celulares. Nos parece importante destacar que los alumnos no estaban tan acostumbrados a trabajar en la clase de Matemática desde la resolución de problemas.

Este grupo colaborativo está conformado por cuatro docentes (Cristina, Emanuel, Camila y Débora) con diversas trayectorias e intereses que aportaron en distintos aspectos a la elaboración e implementación del problema en el aula, al registro de esta experiencia y posteriormente a su análisis.

Planeamos la organización de la clase con un primer momento de exploración y resolución del problema por parte de los alumnos organizados en pequeños grupos. Los docentes integrantes del equipo colaboramos recorriendo los grupos de alumnos y apoyando a aquellos que encuentren dificultades sin perder el objetivo de promover la autonomía en la realización de la tarea.

Luego realizamos una puesta en común de la resolución de las actividades y, según el caso, organizamos debates en torno a las respuestas, analizamos la diversidad de procedimientos matemáticos que surgieron y discutimos sobre las argumentaciones presentadas.

En ambas instancias registramos lo que sucedió en el aula para su análisis posterior. Para esto utilizamos los recursos: GeoGebra, Camtasia, ScreenRecorder (en el celular), fotografías de las resoluciones y grabaciones de audio de las discusiones.

Un análisis a priori del recurso

Extrajimos el recurso que estudiamos, como así también el análisis didáctico respecto de las ‘construcciones imposibles’, del capítulo 3 del texto ‘GeoGebra entra al aula de Matemática’ (Bifano y Lupinacci, 2012) y lo modificamos en algunos aspectos. Hemos vivenciado este problema en el aula en distintos momentos y desde distintas posiciones: fue implementado por Débora en la cátedra de Matemática y su Enseñanza III del Profesorado de Matemática, donde Camila y Emanuel lo vivenciaron como alumnos/docentes en formación. En esta versión del recurso, Débora propone resolverlo primero con lápiz y papel, a diferencia de lo que se proponía en la fuente original. Luego se solicitaba registrar reflexiones/conclusiones en cuanto a la enseñanza de la matemática a partir de lo analizado en esas situaciones. Cuando conformamos el grupo de estudio y decidimos trabajar con este problema, tomamos la decisión de invertir este orden: proponer a los alumnos de segundo año que resuelvan primero con GeoGebra y luego con lápiz y papel. Esto tiene que ver con lo que vivenciaron Camila y Emanuel como alumnos, como fundamentamos en los párrafos siguientes. El recorrido de este recurso no se agota en estas tres versiones, consideramos que el mismo aún está ‘vivo’, sólo que son éstas las que hemos analizado en esta investigación.

Entonces, optamos por ofrecer a los estudiantes la hoja en blanco de GeoGebra (en el software quitar ejes y cuadrícula a la vista gráfica) para la resolución del problema, de esta manera intentamos favorecer la utilización de las propiedades geométricas de los elementos que conformen las construcciones. Habilitar o no el uso de determinadas herramientas del GeoGebra puede considerarse como hacer uso de variables didácticas que influyen de forma significativa en los procedimientos de resolución que utilizan los alumnos. (Ciappina, 2016).

En la consigna ponemos como condición resolverlo primero con GeoGebra, ya sea en celulares y/o computadoras, y luego con lápiz papel. Esta decisión tuvo que ver con que la construcción imposible ‘se puede hacer’ por el redondeo de decimales que viene predeterminada en el software, en lápiz y papel también aunque consideramos que depende de las estrategias que utilicen los alumnos. Es decir, buscamos que surja en el aula una diversidad de procedimientos que disparen cuestionamientos acerca de por qué algunos compañeros pudieron realizar la construcción y otros no.

Previsiones y preguntas acerca del desarrollo en el aula

Asumimos que pueden surgir distintas opciones con lápiz y papel y con GeoGebra: en ambos casos puede darse la contradicción de que algunos alumnos puedan construir el paralelogramo y otros no, esta contradicción será el motivo de la discusión colectiva y de la producción de conocimientos alrededor de qué condiciones tendrán que tener las medidas de los lados en relación con las diagonales.

Tenemos en cuenta que no tiene la misma complejidad resolver en papel si empiezan dibujando la diagonal y luego los lados o al revés, ésta última opción es más dificultosa o menos posible de lograr.

En nuestras reflexiones previas nos planteamos estas preguntas: ¿Cómo construyen la figura? ¿Dibujan/ trabajan con los 4 lados o con los 3? ¿A ojo? ¿O mediante rectas paralelas? ¿Y las medidas?

Discusión o reflexión colectiva

Trataremos articular explicaciones relativas a las construcciones en GeoGebra y en papel buscando responder: ¿Por qué pasa que algunos pueden armar el paralelogramo y otros no?

Pensamos en algunos argumentos posibles de los alumnos que dicen que no es posible construir el paralelogramo:

- No se puede cerrar el triángulo de arriba porque un lado se pasa o queda corto.
- No se ‘infla’ el triángulo porque los segmentos/lados quedan “encima” de la diagonal.

Intentaremos abordar junto a los alumnos algunas conclusiones, por ejemplo:

- El paralelogramo no se puede construir debido a que la suma de las medidas de dos lados del triángulo (que forma la diagonal con dos lados del paralelogramo) son iguales o menores que la medida de la diagonal y a esta propiedad le llamamos desigualdad triangular.
- En todo proceso de medición hay un margen de error, entonces los que lograron armar el paralelogramos lo hicieron porque las medidas no eran exactamente las que decía el problema.
- Siempre que se realiza una construcción en GeoGebra, el software me devuelve una información, es importante poder analizar si eso ‘tiene sentido’ teniendo en cuenta los conocimientos matemáticos involucrados.

Discusiones acerca de la desigualdad triangular

Luego de la puesta a prueba del recurso y de analizar algunos de los datos recopilados nos encontramos con que en ambos soportes algunos estudiantes pudieron construir el paralelogramo y otros no.

Los que pudieron construir el paralelogramo imposible lo hicieron de estas maneras:

- En lápiz y papel: construyeron primero la diagonal de 10 y luego los lados convenientemente; uno de los alumnos construyó la diagonal y luego los lados respetando las medidas y rotaba uno de los lados utilizando una regla.

- En GeoGebra: realizan el paralelogramo utilizando propiedades y las medidas de los lados correspondientes, luego le trazan la diagonal y lo 'aplastan' con la herramienta 'Elige y Mueve' hasta que la diagonal mida 10. Esto es posible de visualizar en el software debido a la aproximación de decimales predeterminada en el mismo.

Los alumnos que no pudieron construirlo:

- En papel: primero construyen el paralelogramo y luego al trazarle la diagonal de 10 'queda afuera'.

- En GeoGebra: fue debido a que, o bien no utilizaron las propiedades al momento de construir el cuadrilátero, o no utilizaron estrategias relacionadas al arrastre para hacer coincidir el vértice del paralelogramo con el del segmento de 10 tomado como diagonal.

Estos aspectos fueron insumos, tal como anticipamos, para ser abordados en la discusión colectiva.

A continuación presentamos un fragmento de desgrabación de uno de los audios de la puesta en común con su respectiva fotografía en la Figura 1. Dicho diálogo se dió por Débora, Camila y dos estudiantes:

D: Tenemos una contradicción, lo que nos pasó es que tanto con el Geogebra como en la hoja, algunos llegaron a hacerlo y otros no. Entonces tenemos que ver qué pasa con eso ¿por qué algunos llegan y otros no? En la hoja porque era difícil de moverlo ¿No? Pero algunos lo fueron moviendo y llegaron. Tendríamos que ver, analizar porqué nos está pasando esto ¿Si? ¿Es posible tener un triángulo, tener esta construcción?¿Ustedes han estudiado alguna otra cosa?

D: Tendríamos que mirar si la construcción se puede hacer.

C:¿Por qué creen que no llegaron los que no llegaron? En cualquiera de los dos dispositivos ¿Por qué no llegaron?

Estudiante: Porque los lados son mas chiquitos que la línea, entonces se va a salir.

Estudiante(otra): Porque estamos midiendo mal.

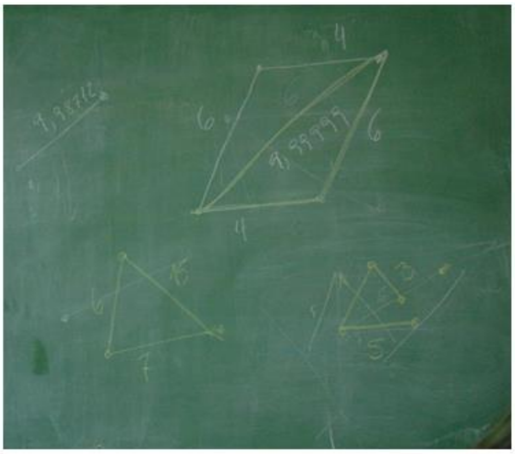

Figura 1. Diálogo entre dos estudiantes y dos miembros del equipo.

En este fragmento de desgrabación de audio queremos destacar las intervenciones de los docentes a cargo del curso, siempre con la intención de *devolverles* el problema a los alumnos y de contrastar sus producciones e intentar, de esta manera, acercarnos a los argumentos matemáticos que permiten poner en duda la posibilidad de realizar la construcción que a simple vista pareciera poder realizarse.

Debido a que no surgía por parte de los alumnos argumentos que pongan en relación las medidas de los lados y la diagonal, es decir que para construir un triángulo es necesario que se cumpla la desigualdad triangular, decidimos proponerles a los estudiantes que modifiquen el ajuste de decimales (a 5 cifras decimales) en el software. Tomamos esta decisión con el objetivo, de que quienes realizaron la construcción comenzando por el trazado del paralelogramo utilizando sus propiedades, luego definieron el segmento que une los vértices opuestos como la diagonal y explicitaron la medida, puedan observar que en este caso la diagonal nunca llega a medir 10, dado que la construcción propuesta era 'imposible'. A continuación explicitamos otro fragmento de desgrabación que da cuenta de esa situación en la figura 2:

C: ¿Qué figura les queda cuando mide 9,99999?
S: Una raya.
Camila explica que construyeron el paralelogramo a partir de sus propiedades.
D: ¿Y esto es un triángulo?
A: No
D: ¿Por qué no es un triángulo? ¿Qué tiene que pasar?
S: Tiene que tener otros dos lados. Por eso se llama triángulo.

Figura 2. Fragmento de discusión en torno a una construcción imposible.

Al seguir sin llegar a la conclusión que esperábamos decidimos analizar uno de los triángulos que conforman el paralelogramo al trazarle la diagonal, queriendo recuperar los conocimientos previos que ellos tenían de la desigualdad triangular para justificar la imposibilidad de la construcción. Intentamos recuperar estas discusiones en el fragmento de desgrabación que muestra la figura 3:

D: Analicemos este pedacito de acá. ¿Qué figura es esta?
S: Un triángulo.
D: ¿Y puede tener esas medidas? ¿Habían estudiado algo de triángulos ustedes? ¿Un triángulo puede medir cualquier cosa? ¿O había alguna condición?
N: No, depende sí (no se escucha) no va a medir lo mismo.
D: O sea que ¿siempre que a mí me den tres segmentos puedo armar un triángulo?
Algunos alumnos dicen que sí y otros que no.
N: O sea si tenés una línea de 5, una línea de 1 y otra de 3, no se puede hacer.
D: ¿Por qué no se puede?
N: Porque una es más larga que la otra.

Figura 3. Fragmento de diálogo en el que se recuperan conocimientos previos.

Respecto de las discusiones explicitadas, destacamos la dificultad con las que nos encontrábamos en este momento de que no surgía el argumento con nombre propio 'Desigualdad triangular' a pesar de que la habían trabajado el año anterior. Creemos que esta incertidumbre de no saber cómo seguir interviniendo es parte del trabajo en el aula de Matemática cuando uno se posiciona desde enfoques constructivistas y que tenemos que permitirnos y valorar que esto es parte de nuestra práctica reflexiva. Además, de valorar, reconocer los argumentos de nuestros alumnos que daban muestras de que entendían las nociones involucradas aunque no lo expliciten con los términos científicos, ejemplos de estos son: "*Porque los lados son más chiquitos que la línea.";* *"Porque estamos midiendo mal"; "O sea si tenés una línea de 5, una línea de 1 y otra de 3, no se puede hacer. (...) Porque una es más larga que la otra."; "Tiene que tener otros dos lados. Por eso se llama triángulo.".* Consideramos que estos argumentos son muy valiosos y que son conocimientos y/o argumentos 'provisorios' si entendemos a la construcción del conocimiento como una serie de aproximaciones sucesivas.

Reflexiones a las que pudimos arribar hasta el momento

- Reafirmamos nuestras ideas acerca de que para producir matemática en el aula es necesario darle protagonismo a los alumnos, ya que ésta actividad está sostenida por sus producciones. Las intervenciones del docente le devuelven constantemente el problema, y de ésta manera acercarnos juntos a la construcción del conocimiento.
- Nos acercamos a la idea de que este paralelogramo no se puede construir por la desigualdad triangular. Notamos que los alumnos utilizaron esta noción al momento de argumentar sus producciones pero no la explicitaban con el nombre que esperábamos: 'Desigualdad triangular'.
- Siempre que se realiza una construcción o que el software me devuelve una información es importante poder analizar si eso 'tiene sentido' teniendo en cuenta los conocimientos matemáticos involucrados.

Líneas de acción

En este primer año de trabajo logramos, con nuestro grupo colaborativo, el diseño de un recurso para el aula, su puesta a prueba en un aula de segundo año, la recolección de materiales para analizar y unos primeros pasos en el análisis de la experiencia.

Planeamos profundizar en el análisis de todo el recorrido y las que siguen pueden ser algunas de nuestras próximas actividades.

- Analizar los registros de video en Camtasia y/o Screenrecorder para profundizar el estudio en cuanto a las producciones de Kevin y de otros alumnos.
- Generar otra versión del recurso y volver a estudiarla en el aula.
- Estudiar los registros recopilados teniendo en cuenta otras categorías de análisis, por ejemplo, el uso de instrumentos de medición, el contraste del dinamismo entre el GeoGebra y el lápiz y papel, entre otras.

Referencias bibliográficas

Bifano, F.; Lupinacci F. (2012). Misión posible, una construcción imposible? En Ammann, S.; Bifano, F.; Cicala, R.; González, C.; Lupinacci, L. (2012). *GeoGebra entra al aula de Matemática*. Buenos Aires: Espartaco.

Broitman, C.; Itzcovich, H. (2009). Geometría en los primeros grados de la escuela primaria: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza. En Panizza, M. (comp.). *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y Propuestas.* Buenos Aires: Paidós.

Broitman C.; Itzcovich H.; Parra C.; Sadovsky P. (1998). *"Matemática Documento de trabajo Nº 5 -La enseñanza de la geometría en el 2º Ciclo".* Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula.

Brousseau (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La PenséeSauvage.

Cappelletti G. (coord.), Costoya, M.G.; Barrero, M. H.; Beltrán, S.; Bifano, F.; Carpintero, C.; Fioriti, G.; Giuliani, D.; Sessa, C.; Veiga, S. (2008). *Matemática-Geometría, Aportes para la Enseñanza- Nivel Medio*. Buenos Aires: Ministerio de Ed. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Ciappina, D. (2015). *Evolución de un recurso para estudiar geometría usando Geogebra en la formación de docentes.* Tesis de Maestría en Enseñanza de la Matemática, UNSAM, Buenos Aires.

Ciappina, D. (2016). *Análisis de un recurso para estudiar geometría usando Geogebra en la formación de docentes.* Comunicación presentada en la VI Reunión Pampeana de Educación Matemática, Santa Rosa, Argentina.

Gueudet, G.; Trouche, L. (2010). Des ressourses aux documents, travail du professeur et genéses documentarires. En: Gueudet, G & Trouche, L. (2010) *Ressourses vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Lyon. PUR. InstitutNational de RecherchePédagogique.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Papini, M.C. (2018). *Una mirada desde la perspectiva de la investigación colaborativa de un proceso de investigación en marcha.* Comunicación presentada en la VI Reunión Pampeana de Educación Matemática, Santa Rosa, Argentina.

Sessa C., Borsani V., Cedrón M., C R., Di Rico E.; Duarte B. (2015). La transformación del trabajo matemático en el aula del secundario a partir de la integración de las computadoras. En AAVV, *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense.* Buenos Aires: Unipe Editorial Universitaria.