

Articulación entre nivel primario y secundario. Una experiencia alrededor de la proporcionalidad mediada por TIC

María Aurelia Atela^{1,4}, Juan Pablo Fernández^{2,5}, Milagros Vila^{3,6}

¹ Escuela Secundaria N° 1. Unidad Académica N° 1 - Belgrano 720, Ayacucho, Bs As

² ISFD y T N° 87. Unidad Académica N° 1- Belgrano 720, Ayacucho, Bs As

³ Escuela Primaria N° 47. Unidad Académica N° 1- Belgrano 720, Ayacucho, Bs As

⁴ aureatela@gmail.com

⁵ jpablof86@gmail.com

⁶ milagrosboero1467@gmail.com

Resumen

En el marco de un trayecto de formación continua se plantea una experiencia de trabajo colaborativo entre un grupo de docentes con el propósito de diseñar y llevar al aula propuestas de clase alrededor de algunos contenidos matemáticos de proporcionalidad para 6° año del nivel primario y 1° año del nivel secundario, pertenecientes a una misma Unidad Académica. El diseño de las situaciones de aula tuvo dos ejes centrales además del propio contenido de proporcionalidad. Por un lado, se le dio centralidad al uso de varios registros de representación y a las relaciones entre ellos y, por otro, a la intención de incluir recursos informáticos que potencien las producciones matemáticas de los alumnos. Para esta presentación se realiza una descripción de las propuestas áulicas y sus implementaciones, y se agregan algunas líneas para seguir avanzando en el estudio de estas producciones colectivas.

Palabras clave: articulación de niveles primario y secundario; proporcionalidad; representaciones; propuesta áulica; TIC

Introducción

La experiencia que proponemos está sustentada desde el enfoque didáctico/curricular del área matemática, coincidente tanto para el nivel primario como para el secundario. Desde esta perspectiva, entendemos que nuestro objetivo es que los alumnos aprendan a “hacer Matemática” a partir de “enseñar Matemática”; lo que supone diseñar situaciones para posibilitar en el aula actividades de producción de conocimiento que en algún sentido guarden analogía con el quehacer matemático, con el propósito de que el alumno se apropie de los saberes y también de los modos de producción de esos saberes. El diseño de la secuencia para el aula que describimos en esta presentación está muy influenciado por algunas nociones teóricas acerca de las representaciones en matemática. Al respecto Etchemendy y Zilberman (2013), entienden las representaciones, en un sentido amplio, como todas aquellas herramientas - signos o gráficos- que permiten hacer presentes los conceptos y procedimientos y a través de los cuales las personas abordan, comunican e interactúan con el conocimiento matemático. Para tener acceso a este conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas. En términos de Duval (2004) representamos los objetos matemáticos a través de distintos registros semióticos, por ejemplo verbal, numérico, tabular, gráfico, algebraico, simbólico y figural. Donde un componente esencial para el aprendizaje de las matemáticas es la coordinación de las diferentes representaciones de un concepto dado. Tal coordinación implica manipulaciones dentro de una cierta representación y traducción a través de las representaciones, apoyándose en una para pensar sobre las otras.

La proporcionalidad al igual que muchos otros objetos matemáticos, funciona en diferentes registros como los ya citados. El uso y el análisis de estas maneras variadas de presentar problemas de proporcionalidad promueven la puesta en juego de diferentes propiedades y relaciones que ayudan a profundizar la noción de proporcionalidad y enriquecen la construcción de los conceptos y las relaciones (Broitman, 2018). Se plantea así un delicado juego de rupturas y continuidades. Es importante analizar qué aspectos del trabajo matemático se pueden desarrollar en la escuela primaria de modo que permitan a los alumnos relacionar lo hecho con lo “nuevo” que se propone enseñar en el otro nivel y por otro lado, de identificar qué cuestiones trabajadas se pueden considerar como punto de partida para desarrollar las nuevas propuestas en el siguiente nivel. Además, qué rupturas hay que introducir para hacer avanzar esta relación. Para

pensar estas continuidades y rupturas abordamos las formas de representación en el concepto de proporcionalidad.

En la descripción que hacemos más adelante entendemos por *registro figurativo*, ligado al sistema perceptivo visual, a la representación gráfica de figuras y dibujos en general; *registro del lenguaje natural*, con sus posibilidades de descripción y explicitación; *registro del lenguaje simbólico* -propio de la matemática- que adquiere características particulares en geometría y que incluye el recurso de las fórmulas.

El lenguaje coloquial es central para el trabajo matemático en todos los niveles de escolaridad. Se trata de una herramienta valiosa no solo para el estudio y recuperación de lo trabajado en clase sino también para la reflexión y explicitación de ideas; sobre todo de aquellas que surgen a partir de las discusiones colectivas en torno a la resolución de problemas.

Puesto que, buscamos favorecer la exploración y la investigación como medios para aprender matemática, se incluye en la secuencia el uso del software de geometría dinámica (GeoGebra), que consideramos puede aportar más herramientas en estos sentidos. Pretendemos mostrar cómo es posible a través de este recurso informático, propiciar un escenario de análisis del problema (presentado desde un registro geométrico) en el que se despliegan una serie de recursos que permiten entrar en diálogo con los diferentes registros de representación.

GeoGebra ofrece diferentes representaciones “Vistas” para los objetos matemáticos (por ejemplo, algebraica y gráfica) que se vinculan dinámicamente. Esto significa que si se modifica un objeto en cualquier Vista, su representación en las otras se actualiza automáticamente (cuando esto es posible). A la vez, los desplazamientos o arrastres que se pueden realizar con este software se constituyen en una herramienta, por esto otra de las potencialidades es que favorece en los alumnos, la distinción entre dibujo (que es el trazado físico constituido por la marca del lápiz) y figura (que es un objeto ideal representado por ese dibujo). Como plantea Itzcovich (2005), toda representación de un objeto (del plano o del espacio) supone una selección entre las informaciones que poseemos de ese objeto. Esas informaciones son de naturaleza visual (lo que se ve) o intelectual (lo que se sabe sobre el objeto).

Asumimos que las situaciones de enseñanza que integran las TIC en el aula, posibilitan clases más dinámicas y ponen a los estudiantes en situación de generar distintas perspectivas así como una nueva relación con el conocimiento. Pero para que esto suceda, el rol del docente es fundamental. Si bien los alumnos pueden tener cierto

manejo de la tecnología, el contenido, la planificación y la organización crítica del contenido es tarea del docente.

Por otra parte, la articulación de distintos niveles educativos, en cuanto a la dimensión curricular, aparece aquí como un entramado que pone en diálogo los propósitos de cada nivel, las prácticas docentes, la organización del trabajo escolar y los modos de enseñar, de aprender y evaluar de cada trayecto, las actividades de los/as docentes y los estudiantes y de los estudiantes entre sí. En tanto la articulación en su dimensión pedagógica, adquiere centralidad en el concepto de trayectoria educativa. Según Perrenoud (2006), la tarea del alumno se percibe como ese oficio a aprender y a construir dentro de complejos procesos de socialización durante su itinerario escolar.

Habitualmente, la escuela primaria está vinculada con la aritmética y los números, mientras que la escuela secundaria se relaciona con el álgebra, el trabajo sobre lo general y, por lo tanto, el uso de letras. Sin embargo, no es posible hacer un corte tajante entre un tipo de trabajo y el otro, sino que pensamos más apropiado hablar de una transición.

Desarrollo

El contexto de la experiencia de formación

Nuestro trabajo se enmarca en la participación de un trayecto de formación continua que forma parte de un proyecto¹ más amplio en el que cinco equipos de docentes de distintas ciudades (Ayacucho, Azul, Olavarría y Tandil) nos proponemos diseñar y llevar al aula situaciones de enseñanza que incluyan las TIC como herramientas para la producción de conocimientos matemáticos en el aula. La experiencia se desarrolló durante el año 2018 y en nuestro caso diseñamos situaciones que se proponen articular ciertos contenidos del tema proporcionalidad en un sexto año de nivel primario (6°B) y un primer año de secundaria (1°B) pertenecientes a la Unidad Académica N° 1 de Ayacucho.

Fue indispensable contar con instancias de trabajo compartido para la lectura profunda de los diseños y/o propuestas curriculares y para el análisis de nuestras propias prácticas de enseñanza, a fin de posibilitar la toma de decisiones que nos permitan revisar, reorientar y/o confirmar las mismas. Diseñamos luego una secuencia para nuestras aulas

¹ Proyecto titulado: Recursos para el Empoderamiento de Formadores en TIC, Ciencias y Ambiente integrado por el grupo de investigación ECienTec de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

sobre la base de los conocimientos impartidos en cada nivel y considerando las habilidades de los alumnos en cuanto al uso del software Geogebra.

Momentos² para llevar la secuencia a las aulas

Consideramos que los problemas que forman parte de la secuencia cumplen con distintos objetivos, tienen cierto alcance para el nivel primario y otro para el nivel secundario. Aquí nos centraremos en el problema 1 de la secuencia (ver Figura 1; en anexo, ver problemas 2 y 3), para el tratamiento de la proporcionalidad.

Problema 1:

Parte I



El siguiente dibujo es un cuadrado

a) Completa en cada caso el dato faltante:

Longitud del lado del cuadrado(cm)	0	2	4	7		12	15
Perímetro del cuadrado (cm)		8			40		

b) Si se duplica un par de lados, se obtiene un rectángulo. ¿El perímetro de la nueva figura se duplica? Justifiquen

c) Si se duplican los lados del cuadrado original, se obtiene otro cuadrado. ¿El perímetro de la nueva figura se duplica? Justifiquen

d) Si se triplican los lados del cuadrado original, se obtiene otro cuadrado. ¿El perímetro de la nueva figura se triplica? Justifiquen

e) A partir de lo analizado, ¿en qué casos el perímetro es directamente proporcional a la longitud del lado?

Parte II

Ahora analicen el archivo de GeoGebra "problema 1" y sigan las instrucciones:

a) Muevan el punto a del deslizador, ¿qué observan?, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante?, ¿por qué creen que ocurre esto?

b) ¿Qué significado tiene el valor de a?

c) ¿Qué sucede cuando a=0? ¿Coincide con el valor de la tabla que completaron en la parte I, 1 a?

d) Ahora muevan el punto A, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante? ¿por qué consideran que ocurre esto?

e) Muevan el punto B, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante? ¿por qué consideran que ocurre esto?

f) Utilizando la Vista Algebraica y/o la Vista Gráfica completen la tabla:

Longitud del lado del cuadrado	3					
Perímetro del cuadrado	12	36			80	
Área del cuadrado	9		100	900		1

g) A medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado, su perímetro aumenta, ¿aumenta de manera directamente proporcional?

h) A medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado, su área aumenta, ¿aumenta de manera directamente proporcional?

Figura 1. Problema 1 de la secuencia. Adaptación de otro extraído del capítulo 4 de Broitman (2018).

² El grupo colaborativo más amplio, tomó la decisión de utilizar la palabra "momentos" para referirse a ciertas etapas que se diferencian por el tipo de actividad que proponemos a los alumnos, por los objetivos que se plantean y por el orden en el tiempo.

Momento cero

En el nivel primario³, previo a la implementación del problema 1, consideramos pertinente que, para dar continuidad a la planificación anual, era necesario que los alumnos trabajen en paralelo con diferentes problemas que involucren relaciones de proporcionalidad directa por un lado y con figuras planas (circunferencias, triángulos, cuadriláteros) por otro. A partir de éste último, se llevó a cabo un período de exploración del software Geogebra, donde utilizan las netbooks de la institución.

En el nivel secundario trabajamos previamente la diferenciación entre área y perímetro como magnitudes independientes, más allá del modo de calcular ambas medidas. De allí que en un comienzo proponemos problemas que ponen el acento en “transformar figuras” de manera tal que varíe el área independientemente del perímetro y viceversa.

Este tipo de problemas permitirá identificar que no siempre se conservan las relaciones de proporcionalidad directa. Por ejemplo: si se duplica un lado de un rectángulo y se preserva la medida del otro, se duplica su área, pero no su perímetro. En cambio, si se duplica la medida de ambos lados de un rectángulo, su perímetro se duplica, pero su área se cuadruplica.

Momento uno

La implementación se desarrolló en cada curso, durante el mes de noviembre del ciclo lectivo 2018. Registramos la experiencia mediante videos de distintas escenas de la clase y también fotografiamos producciones de los estudiantes.

La *Parte I* de este problema permite explorar la relación de proporcionalidad directa entre la medida del lado del cuadrado y el perímetro y sus propiedades.

En la resolución del inciso *a*, algunos grupos recurren a la consideración del dibujo dado, puesto que miden con regla sus lados. Otros en cambio, argumentan desde el registro escrito del enunciado y el registro tabular que es un cuadrado, por lo que las resoluciones se inscriben en el campo de lo multiplicativo. En tanto en el nivel secundario, acuden además al registro figurativo. Así lo evidencian Milagros: “hicimos la figura a partir de los cuadraditos y calculamos el perímetro”, y Marianela: “Nosotros pensamos que si cada lado tiene 2 cm, teníamos que hacer 2, 4, 6, 8”. (Figura 2)

³ En adelante utilizaremos NP para referirnos al nivel primario y NS para el nivel secundario.

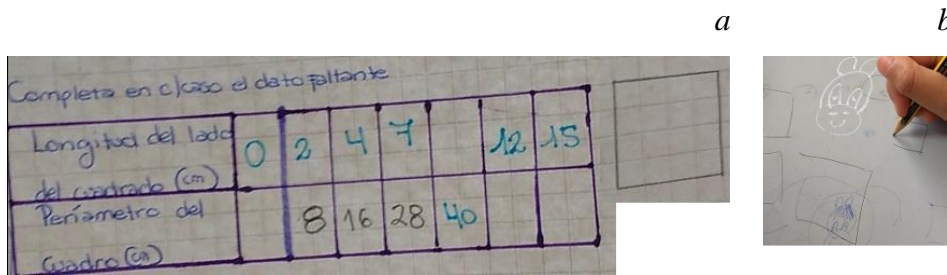


Figura 2.: Registro figurativo. a: Milagros. b: Marianela

El siguiente diálogo es parte de una puesta en común entre los alumnos y la docente del nivel primario

D: ¿Cómo completaron el correspondiente a 4 cm?

Pedro: sería el doble de 8, porque 4 es el doble de 2

D: ¿cómo sabemos que aumenta proporcionalmente?

Huaico: porque si el lado del cuadrado sube, el perímetro sube también.

D: ¿Y para 12 cm?

Josefina: hicimos $8+40$, porque son los resultados de 2 y 10.

Esta identificación de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es detectada en ambos niveles. El tratamiento de lo general sobre propiedades aritméticas, la expresión de la generalización en lenguaje natural, la puesta en juego de una coordinación entre diferentes registros de representación semiótica son rasgos esenciales de la práctica algebraica. Así se puede ir construyendo el sentido de la operatoria algebraica. Para diferenciarlo del registro algebraico que incluye el uso de las fórmulas o de las expresiones algebraicas⁴ lo designamos como registro pre-algebraico. Al interrogar la docente del nivel secundario por el valor correspondiente a longitud 0, Juana expresa: “*al no tener lado no tiene ningún perímetro porque no hay figura, entonces completamos con 0*”.

Los incisos *b*, *c* y *d* permiten trabajar las propiedades de la relación de proporcionalidad en caso que exista, puesto que si se duplica el lado del cuadrado, también se duplica el perímetro del mismo. En varios grupos de ambos niveles se apoyan en el registro figurativo para visualizar el rectángulo en relación al inciso *b*. Mientras que para *c* y *d*, utilizan además la tabla anterior.

En el NS (Figura 3), observan que si se duplica un par de lados del rectángulo y se preserva la medida del otro par, se duplica su área, pero no su perímetro. Algunos procedimientos evidencian además la consideración del valor de la unidad.

⁴ Este tratamiento se realiza en el análisis del problema 2 y 3 de la secuencia

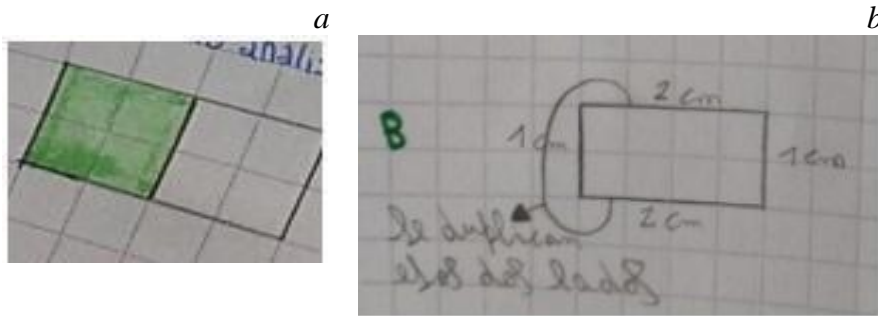


Figura 3. Resoluciones del NS. a: Variación del área. b: El valor de la unidad

Para distinguir la pertinencia de la relación de proporcionalidad, en el inciso *e* surgen varios cuestionamientos en el NS acerca de qué significa “directamente proporcional”.

Cabe aclarar que el grupo 1° B se conforma con 25 alumnos de distintos establecimientos educativos del nivel primario del distrito, por lo que previmos que estas cuestiones podrían surgir. En el NP si bien reconocen las propiedades a través de la tabla, la dificultad estuvo en reconocer desde otros registros para qué magnitudes se cumplía dicha relación y en dar cuenta de la pertinencia de dicho modelo. En el otro nivel lo hacen desde el registro numérico, figurativo y pre algebraico.

El uso de tablas se puede interpretar como una continuidad entre ambos niveles, como una representación que adopta más sentidos con el paso por la escuela secundaria. Vale la pena advertir que el pasaje de un tratamiento basado en tablas de valores que admiten una colección finita de números y magnitudes a otro que considera la proporcionalidad como una relación funcional requiere un trabajo más arduo: tratar con colecciones infinitas y asumir la linealidad, entre otras. Esta articulación exige tender puentes entre aquellas tablas de proporcionalidad directa y el estudio de procesos que varían de manera proporcional, la noción de variable, etc. (Grimaldi e Itzcovich, 2013).

Se evidencia que para poder recuperar los conocimientos de la escuela primaria y lograr hacerlos avanzar en la escuela secundaria, es necesario que los alumnos reconozcan los objetos matemáticos que el docente intenta recuperar. En palabras de Sadovsky (2005): “los alumnos dicen no haber estudiado un asunto que sí estudiaron, simplemente porque no lo reconocen cuando el docente lo presenta de un modo que no tiene en cuenta las situaciones específicas en las que tuvieron oportunidad de aprenderlo”.

Momento dos

La *Parte II* incluye el trabajo a partir de un applet creado por nosotros para trabajar desde la visualización y desde la utilización de diferentes formas de representación en

simultáneo (vista algebraica, vista gráfica). Pretendemos profundizar el estudio de la proporcionalidad y planteamos la resolución de problemas con dos magnitudes que dan lugar a una relación de doble proporcionalidad. En el NS los alumnos utilizan el software instalado en sus celulares.

Durante la resolución de los incisos a , b y c pudimos apreciar que los alumnos, en forma grupal, consideran al valor de a como la longitud del lado del cuadrado y desde la exploración, asocian la leyenda de la pantalla con el valor del perímetro del cuadrado según la medida que indica el deslizador. Una de las decisiones que asumimos estuvo ligada a utilizar números naturales en ambos niveles, por tanto el incremento del deslizador fue de 1.

Los siguientes son algunos registros escritos de las producciones de los alumnos para los incisos a , b , c , d y e (Figuras 4 y 5)

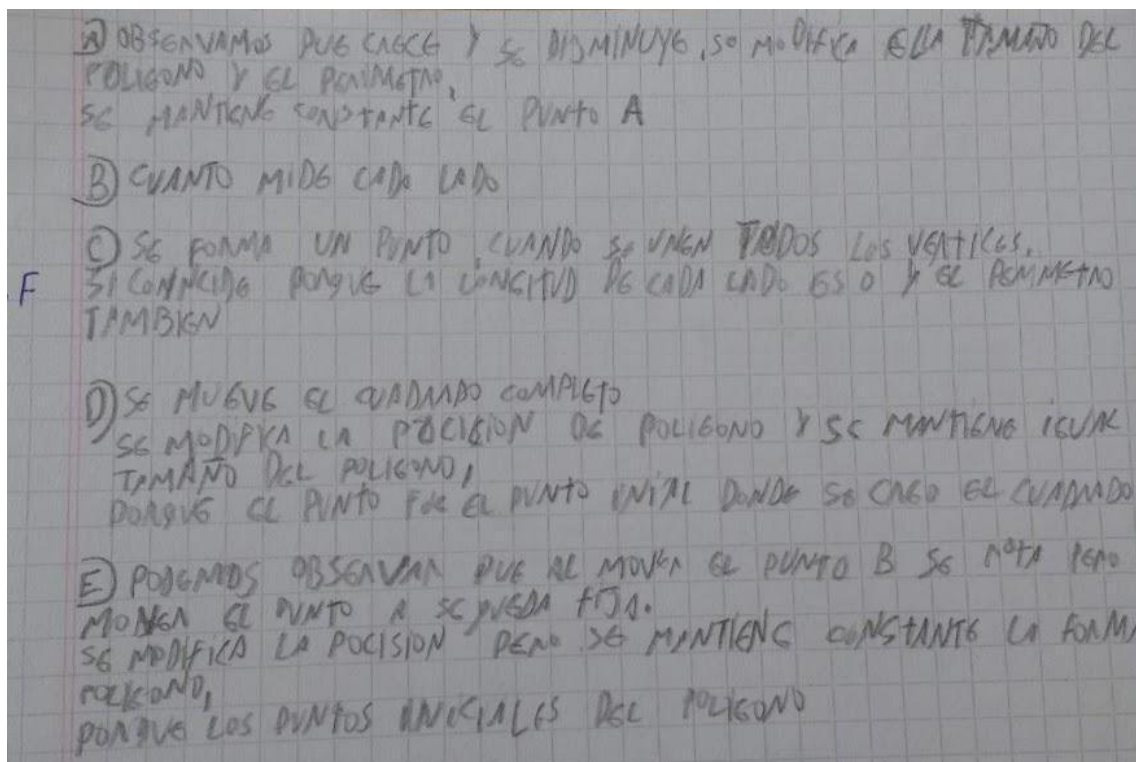


Figura 4

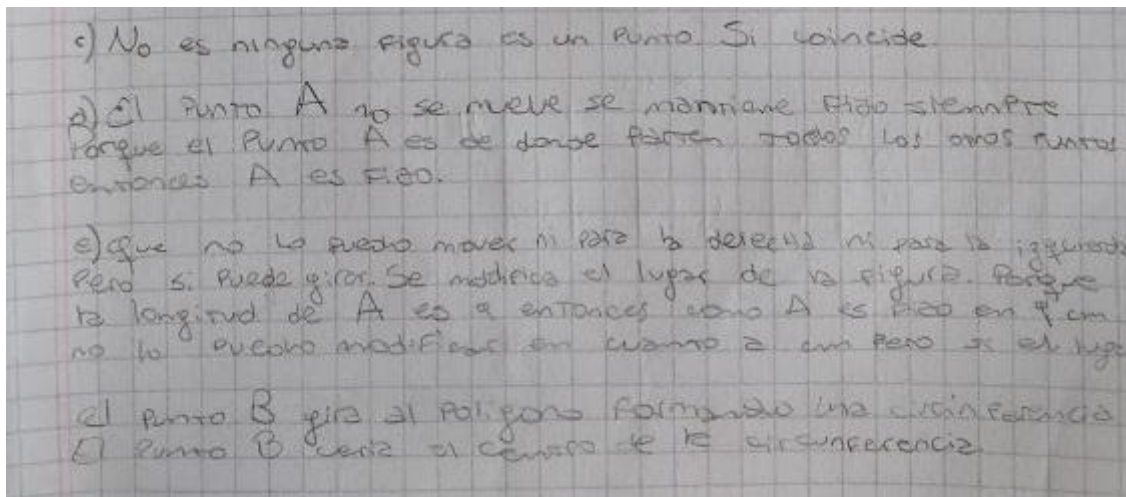


Figura 5

El siguiente diálogo, en el aula de NS, es parte de la puesta en común para el inciso c, a partir de y tiene relación con la visualización en la vista gráfica de Geogebra (Figura 6).

Nicolás: se unen todos los vértices

Teo: cuando el cuadrado se achica no hay perímetro ni longitud del lado, entonces queda como si fuese un solo vértice.

D: ¿hay polígono en este caso?

Alumnos: no hay señ, porque es un punto y no tiene perímetro.

Marianela: esos vértices se transformaron en un círculo

Docente: ¿un punto es un círculo?

Simón: es como un círculo pero con cero de radio

Emma: nosotras le cambiamos el estilo a los vértices, elegimos la forma de x

Matías: y si la figura se transforma es un punto, que no es un polígono, ¿por qué la leyenda dice *Perímetro de polígono* $l=0$?

Perímetro de polígono1 = 0



Figura 6. Vista gráfica de Geogebra

En este diálogo observamos que el dinamismo del programa les permite considerar que se puede achicar el lado del cuadrado hasta llegar a cero, el polígono se transforma en un punto y al mismo tiempo permite preguntarse si tiene sentido porque no hay polígono. Además, notamos que las limitaciones del programa (por ejemplo un punto se

ve como un círculo y existe un polígono de perímetro cero) se transforman en posibilidades de discutir cuestiones matemáticas como propone Sessa (2015).

En el aula del NP conjeturan que en el registro gráfico no hay coincidencia con la tabla

Rufino: acá en la vista gráfica, sigue figurando la palabra polígono1 y en realidad es un punto.

Santino: el gráfico siempre tiene que empezar del (0,0) para que sea directamente proporcional.

En cuanto a las respuestas escritas que dan a los incisos d y e , giran en torno a los movimientos en el plano del polígono ABCD (Figura 4 y 5). Algunos grupos del NS acompañan la reflexión mostrando la captura de pantalla de su celular, donde se describe algebraicamente la propiedad geométrica que cumple el punto B (Figura 7). En este “ida y vuelta” entre las “Vistas”, las herramientas del software juegan un papel muy importante.

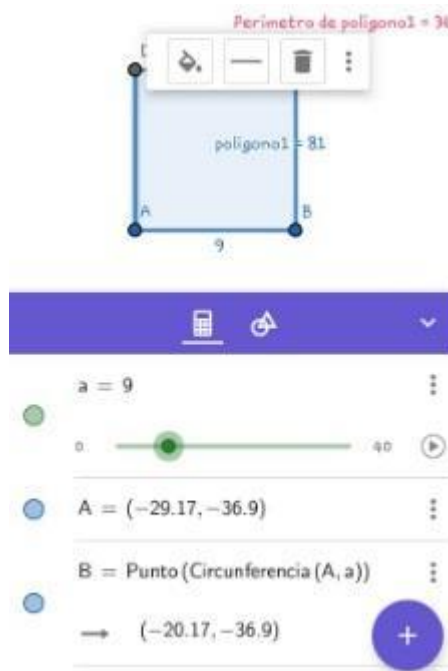


Figura 7. Vista Algebraica de Geogebra en el celular

Para la puesta en común de los incisos f , g y h , se organizan dos tablas. Una de ellas relaciona la longitud del lado y el valor del perímetro del cuadrado; y la otra, entre la longitud y el área del cuadrado donde se evidencia una relación de doble proporcionalidad. Ambas tablas se van completando con las respuestas de los distintos grupos. Los alumnos en tanto van registrando en sus carpetas lo socializado.

Reflexiones finales

Por medio del contenido proporcionalidad, y con ayuda del software específico para el área de matemática como GeoGebra, los estudiantes resuelven el problema 1 de la secuencia propuesta mediante el uso de diferentes registros de representación semiótica tales como tablas de valores, pares ordenados, gráficos, figuras de análisis.

Atendiendo a determinadas variables didácticas, los alumnos de ambos niveles abordan las situaciones apelando a diferentes estrategias ligadas al registro numérico/aritmético (uso de multiplicaciones y divisiones). Asimismo, en el nivel secundario se apoyan en el registro figurativo y pre-algebraico.

Pudimos dar cuenta que, el planteo de situaciones en las cuales siempre se parte de la misma representación, por ejemplo tabla de valores, para llegar a otra, obstaculiza la posibilidad de “hacer visibles” aspectos de las representaciones y de sus relaciones, tal como lo señalan Grimaldi e Itzcovich (2013). En cambio cuando éstas se interrelacionan, las conocidas aparecen con formatos diferentes o con otra finalidad permitiendo concebir nuevas relaciones y nuevos objetos matemáticos.

Dejamos para un estudio posterior el relato de las experiencias al implementar en el aula de secundaria el problema 2 y 3 de la secuencia donde se pone el foco en la idea funcional y en algunas expresiones algebraicas que permiten modelizar el problema.

El trabajo llevado a cabo en los años 6°B y 1°B nos permite formularnos estas preguntas, en términos de posibilidades de enseñanza: ¿cómo podemos abordar este contenido para que los alumnos estén en mejores condiciones de afrontarlo hoy y de avanzar en su estudio en años posteriores?, ¿cuáles son los modos de trabajo y los registros de representación que han sido privilegiados en años anteriores, y cómo podemos apoyarnos en ellos para pensar sobre los otros?

Consideramos que estas preguntas, entre otras, reflejan nuestro desafío en relación con la articulación, no solamente entre dos niveles sino para cada año de nuestra trayectoria como docentes.

Referencias bibliográficas

Broitman, C. (2018). *La divina proporción: la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria y en los inicios de la escuela secundaria*. Buenos Aires: Santillana.

- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.
- Etchemendy, M. y Zilberman, G. (2013) Hablar y escribir en la clase de matemática: interacciones entre alumnos y maestros, pp. 197-218. En Broitman, C. (comp.) *Matemáticas en la escuela primaria: saberes y conocimientos de niños y adolescentes*. Buenos Aires: Paidós.
- Grimaldi, V. e Itzcovich, H. (2013). Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática, pp. 69-91. En Broitman, C. (comp.) *Matemáticas en la escuela primaria: saberes y conocimientos de niños y adolescentes*. Buenos Aires: Paidós.
- Itzcovich, H. (2005). *Introducción al estudio didáctico de la geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Perrenoud, Ph. (2006). *El oficio de alumno y el sentido del trabajo escolar*. Madrid: Editorial Popular.
- Sessa C., Borsani V., Cedrón M., Cicala R., Di Rico E. y Duarte B. (2015). La transformación del trabajo matemático en el aula del secundario a partir de la integración de las computadoras. En AAVV: *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense*. Buenos Aires: Unipe Editorial Universitaria.

Anexo

La secuencia completa, que incluye los problemas 1, 2 y 3, se encuentra disponible en el siguiente enlace:

<https://drive.google.com/file/d/1MuyBj8EwvDUXqt504rOm3w7aDwAGtBPR/view?usp=sharing>