DISTINTOS ENFOQUES PARA LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE LÍMITE EN UN PRIMER CURSO DE CÁLCULO

Néstor Bucari; M. Fernanda Bertero; María de las Mercedes Trípoli

GIDIE, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata
nbucari@ing.unlp.edu.ar; fbertero@hotmail.com; mercedes.tripoli@ing.unlp.edu.ar

Resumen
En el presente trabajo se analizan dos presentaciones diferentes del concepto de límite utilizadas en el primer curso de Cálculo Diferencial para alumnos de la Facultad de Ingeniería en dos períodos: 1992/2000, y 2003/2007. El propósito es encontrar indicios de las concepciones epistemológicas subyacentes en las diferentes propuestas y relacionarlos con las modelos de enseñanza predominantes en los cursos de cada etapa.
Para ello se utilizará el material impreso (principalmente los apuntes de cátedra, guías de actividades, etc.) correspondientes a los diferentes cursos considerados, complementados con relatos de docentes representativos de los diferentes momentos.

Palabras clave: Límites. Concepciones. Modelos de enseñanza.

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se analizan dos presentaciones diferentes del concepto de límite utilizadas en el primer curso de Cálculo Diferencial para alumnos de la Facultad de Ingeniería en dos períodos: 1992/2000, 2003 a la actualidad. El propósito es encontrar indicios de las concepciones epistemológicas subyacentes en las diferentes propuestas y relacionarlos con las modelos de enseñanza predominantes en los cursos de cada etapa.
Para ello se utilizará el material impreso (principalmente los apuntes de cátedra, guías de actividades, etc.) correspondientes a los diferentes cursos considerados, complementados con relatos de docentes representativos de los diferentes momentos.
En la etapa fundacional del cálculo diferencial e integral (1650-1750) el instrumento básico utilizado fueron las cantidades infinitesimales (Newton, Leibniz, Bernoulli); la idea de límite comenzó a utilizarse posteriormente (D'Alambert, 1765) pero sin arribar a una definición satisfactoria del concepto hasta mediados del siglo XIX. Puede decirse que la primera etapa se caracterizó por un excepcional desarrollo de las ideas fundamentales del cálculo y su utilización para la explicación de profundos problemas geométricos y

físicos. Al mismo tiempo, la idea de “incrementos infinitesimales” que demostraba ser una potente herramienta en manos expertas, fue objeto de acertadas críticas (siendo la más conocida la del Obispo Berkeley de 1734, dirigida contra los trabajos de Newton). El proceso de fundamentación del cálculo (en el sentido de encontrar una presentación axiomática del mismo) no culminó hasta avanzado el siglo XIX, durante un corto período de tiempo, y a partir de hechos mutuamente relacionados: la definición ε- δ del límite funcional (debida a Weierstrass), la aritmetización de los números reales (Dedekind) y la teoría de conjuntos (Cantor). Un estudio de esta evolución y del papel jugado por los distintos actores puede encontrarse en el trabajo de Bertero y Trípoli (2006).

Para la teoría matemática, el límite se constituyó a partir de entonces en un antecedente necesario para la definición de derivada, en tanto que límite de los cocientes de los incrementos finitos. Quedó establecida desde entonces una secuencia lógica para la presentación teórica del cálculo diferencial:

Números naturales -> Números reales -> Límites -> Derivadas

En lo que sigue, veremos de qué manera la jerarquía obtenida por el concepto de límite condicionó la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial en los primeros cursos del nivel universitario[1].

TRES MODELOS DE ENSEÑANZA

Charnay (1994), distingue tres modelos de enseñanza, de acuerdo a las relaciones que prevale-cen en el esquema didáctico, y los relaciona con el papel que juega en los mismos la resolución de problemas:

1. El modelo **normativo**, centrado en el contenido, en el cual la relación que prevalece es la del profesor con el saber. Los problemas en este caso juegan el papel de *control* sobre el aprendizaje.
2. El modelo **incitativo**, centrado en el alumno, prevaleciendo en este caso la relación entre el docente y el alumno. Los problemas juegan aquí el papel de *móvil* del aprendizaje.
3. El modelo **apropiativo**, centrado en la construcción del saber por parte del alumno. Los problemas son usados como *recursos* del aprendizaje.

[1] Un análisis de las dificultades de los estudiantes ligadas al concepto de límite puede encontrase en Artigue (2000), donde se distinguen las originadas en obstáculos epistemológicos, en los procesos cognitivos y las relativas a la complejidad de la definición formal de límite.

Presentaremos aquí dos ejemplos de situaciones didácticas, concernientes a la enseñanza del límite, en las que la adopción de diferentes posiciones epistemológicas ha condicionado el modelo de enseñanza.
Como fuente usaremos el material que las cátedras usaron para presentar los temas a los estudiantes.

LOS APUNTES DE CÁTEDRA

"Los apuntes o libros de texto son uno de los recursos más usados en la enseñanza universitaria. En muchos casos son los medios exclusivos, en numerosas aulas predominantes y en otras son complementarios de medios audiovisuales y/o informáticos, pero en todas de una forma u otra, están presentes" Abate y Badenes (2001).
Estos materiales son parte integrante del proceso de enseñanza, y su elaboración debe partir del análisis de las características de los restantes componentes de la situación didáctica: docentes, alumnos, saberes y la relación entre ellos, así como las características del aula, el entorno institucional, etc. Por esto el análisis de los apuntes nos manifiesta, no sólo las concepciones de los autores y del sentir didáctico en una determinada época, sino las distintas concepciones que se transmiten en el proceso de enseñanza a los estudiantes, una vez que se ha optado por tal o cual forma de apunte.
¿Por qué una misma noción se presenta en contenido diferente a enseñar (en cuanto a situaciones en la que aparece, procedimientos seguidos, ejemplos utilizados, etc.)?. Según Chevallard, esto depende de las adaptaciones realizadas desde el saber sabio (científico) al saber a enseñar, lo que él llama la transposición didáctica. En estas adaptaciones se deja de lado la subjetividad del investigador, el saber es separado de su entorno epistemológico, en cierto modo, dan cuenta de lo que es necesario saber. Como mencionan Joshua y Dupin (2005), la sola organización del saber, nos habla de un consenso sobre la evaluación de los aprendizajes. Por lo tanto, esta transposición didáctica plasmada en el apunte no está solamente dirigida al alumno sino también a los docentes que van a dictar el curso.
Revisando el material de las cátedras correspondientes (Análisis Matemático I hasta el año 2000 y Matemática A desde el año 2003) observamos dos presentaciones sustancialmente diferentes del concepto de límite funcional.

LA ENSEÑANZA DE LOS LÍMITES ENTRE 1992/2000

El material de la cátedra está estructurado de acuerdo al orden usual en los escritos matemáticos tradicionales: definición, teorema, demostración y, eventualmente, algún ejemplo. En él la noción de límite se introduce luego del estudio del concepto de sucesión y límite de una sucesión, habiendo éste sido definido de la siguiente manera:

> *Se dice que el número real L es límite de la sucesión real s, si vale la siguiente fórmula*.

A partir de esto se define el límite en el infinito de una función (teniendo en cuenta que una sucesión es una función con dominio en los naturales y que interesa el comportamiento de ellas para números naturales cada vez más grandes) y se mencionaba el siguiente ejemplo, que daba cuenta de la relación existente entre una sucesión, una función y sus límites:

> *Partamos de la sucesión* $\underline{s}: N \to R$ *dada por* $s_n = \dfrac{2n-1}{n-1}$ *para* $n \neq 1$*, y* $s_1 = 0$*. Calculando* s_n *para valores de* *n̲* *cada vez mayores, el lector podrá intuir que esta sucesión tiene límite 2; y se puede demostrar, en efecto, que lím* *s̲* *=2. Vamos a definir ahora una función real de variable real inspirada en la sucesión* *s̲*. *Tomamos como dominio D=*$(1,+\infty)$*, y definamos f:*$D \to R$ *dada por* $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$*. Recordando lo sucedido con la sucesión* *s̲*, *la intuición nos dice ahora que, al aumentar* *x̲*, *el valor f(x) se irá aproximando a 2. Tratemos de demostrar que, aplicando la definición, se obtiene efectivamente que 2 es el límite de* *f̲* *para* *x̲* *tendiendo a* $+\infty$*, lo cual se simboliza así:* $\underset{x\to\infty}{lím} f(x) = 2$. … siguen dos demostraciones distintas de la afirmación.

Finalmente, aparece la definición dada por Weierstrass de límite de una función en un punto, también llamada $\varepsilon - \delta$:

Sea f: D $\rightarrow R$ *una función tal que D incluya un entorno reducido del punto* x_0 *.*

Se dice que el número real L es límite de la función f en el punto x_0 *, si vale la fórmula* $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ *.*

Para la crítica de esta presentación observamos lo siguiente:

1. El estudio del límite de una sucesión –en forma previa al límite funcional – no se justifica como estrategia de enseñanza puesto que el límite de una variable discreta no es menos complicado que el de una variable continua. Son de alguna manera, de dificultad equivalente y conceptualmente son cosas diferentes. Hay una diferencia sustancial entre el límite de una función en infinito (que describe un comportamiento “asintótico”), y el límite de una función cuando la variable tiende a un valor finito (que da cuenta del comportamiento de la función en las cercanías de ese valor). La analogía entre ambos límites ni siquiera es formal. La ocurrencia del límite de una sucesión antes del límite funcional puede justificarse en una presentación de los fundamentos del análisis real, en la que ciertas sucesiones de números racionales pueden usarse para construir a la recta real. Si bien no es este ese caso, el ordenamiento remite tal vez a esa preocupación por una presentación “autocontenida” o “fundamentada” del análisis.
2. En este apunte se puede observar la rigurosidad en el orden, el lenguaje y la disposición muy similar a la de un texto clásico de matemática, que siempre resulta complicado de leer e interpretar, como explican Davis y Hersh (1989): “…*el procedimiento de descubrimiento es eliminado de la descripción de lo descubierto, y no se explican ni se documentan los pasos de que consistió. Una vez elaborado el teorema y su demostración, sean cual fueren el camino seguido y los métodos utilizados, toda la presentación verbal y simbólica es reestructurada, pulida y reorganizada según los cánones del método lógico-deductivo. Así lo exige la estética del oficio”.*
3. Respecto a las consecuencias de la definición de Weierstrass, los mismos autores dicen:

   “*Mediante este proceder se logra eliminar toda referencia a números que no sean finitos…No obstante todo ello tiene un precio. Una magnitud intuitivamente clara y físicamente mensurable como la velocidad instantánea queda sometida a la noción sorprendentemente sutil de <<límite>>.”*

> De modo que el problema de la velocidad instantánea o el de la recta tangente a una curva, situados en el mismo origen del cálculo, quedan mediados por una noción de alguna manera extraña a ellos, pero a la que se considera previa e imprescindible.
>
> La postergación de la idea de derivada –o cambio instantáneo- hasta la obtención del concepto de límite, separa la introducción al cálculo diferencial de los problemas que le dieron origen.

Vemos así que el concepto de límite aparece solamente justificado por su propia definición, y como eslabón para desarrollos posteriores. La necesidad de su existencia no se verá comprobada hasta más tarde, cuando se use para otras definiciones –continuidad, derivada- cristalizando la impresión de que la matemática "está hecha" y "hay que entenderla", generalmente con gran dificultad.

Desde el punto de vista didáctico esta forma de presentar el tema –consecuencia, como hemos visto, de la adopción de posturas epistemológicas acerca de la matemática – no deja muchas alternativas. No hay otra forma de enseñar el tema que no sea exponiéndolo por parte del profesor; el modelo normativo se impone por defecto.

En efecto, la metodología de trabajo existente en el primer curso de Cálculo (Análisis Matemático I) durante esta etapa se basaba en una exposición teórica por parte del profesor (en una clase numerosa, con más de cien alumnos) y luego en una clase práctica en donde los alumnos podían consultar las dudas de la guía de trabajos prácticos y escuchar algún ejercicio que se explicaba o hacía en el pizarrón. El proceso de enseñanza y aprendizaje respondía al modelo normativo, centrado en el docente, que es quien posee el saber y lo transfiere. En este modelo se ponderan las cualidades del docente para llegar a mostrar del mejor modo posible un determinado saber. El alumno es un mero receptor de estos conocimientos y tiene un rol pasivo en este proceso**.**

UN ENFOQUE DIFERENTE

Como parte de una reforma curricular en las carreras de Ingeniería a partir del año 2003 se redefinió el trayecto de Matemáticas. La modificación incluyó la adopción de estrategias que favorecieran el aprendizaje constructivo, colaborativo y orientado a la resolución de problemas. Distintas aproximaciones a la innovación desarrollada pueden encontrarse en los trabajos de Bucari, Abate y Melgarejo (2004,2007). La forma de trabajo propuesta para los cursos es la actividad –preferentemente grupal- de los estudiantes sobre situaciones planteadas en el material, con la guía de los docentes. La enseñanza tiende configurar situaciones en las que predomina el modelo apropiativo.

En relación a la enseñanza del tema límites se adoptaron las siguientes decisiones:

1. La secuencia de contenidos se estableció como:

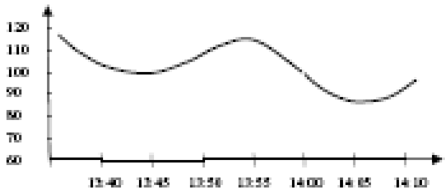
   Variación total -> variación promedio -> variación instantánea -> derivadas

   Haciendo una mención del límite como el valor al que se aproximan las variaciones promedio cuando el incremento de la variable independiente se aproxima a 0.
   Esta secuencia permite tratar los problemas motivadores del cálculo diferencial: el de la velocidad instantánea y el de la recta tangente sin jerarquizar al límite como una herramienta previa. Esta manera de motivar el estudio de las derivadas puede encontrarse esbozada el libro de Lang (1990)
2. En los primeros cursos, inmediatamente después de obtener la expresión de la derivada como el límite de los cocientes incrementales, se pasaba al estudio de los límites, basándose en registros numéricos y gráficos. La experiencia obtenida en los cursos mostró que este esquema de trabajo creaba los siguientes obstáculos en el aprendizaje:
   a. Los límites quedaban ligados a cocientes incrementales, dificultando el considerar límites funcionales en general.
   b. Para el cálculo de límites algunos estudiantes recurrían únicamente a una tabla de valores de la función en números próximos al valor de interés, sin apelar a las propiedades de los límites.
   c. Relacionado con lo anterior, en la concepción predominante se resaltaba la cualidad “aproximativa” del límite.

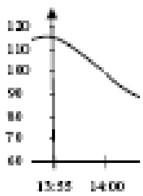
3. Para resolver estos problemas se adoptaron los siguientes cambios:

   a. Se completa el estudio de las reglas de derivación, incluida la regla de la cadena, y de su uso en la resolución de problemas geométricos y de razones de cambio. Luego se pasa al estudio de los límites, separados ahora temporalmente de la definición de derivada.
   b. Se recurrió al concepto provisorio de “valor esperado” como introductorio a una idea de límite alejada del modelo aproximativo. La actividad que se propone a los estudiantes en este momento es la siguiente:

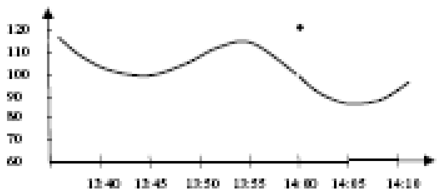
Un dispositivo registra los valores de la frecuencia cardiaca de un paciente internado, generando una gráfica. Debido a una falla en el mecanismo de impresión, en la gráfica no aparece el valor correspondiente a las 14 horas. La siguiente figura es el gráfico obtenido



1. ¿Qué valor esperan Uds. que haya tenido la frecuencia cardiaca a las 14:00 horas?
2. Para responder lo anterior ¿qué intervalo o intervalos de tiempo tuvieron en cuenta? ¿Por ejemplo: importan los valores de la función antes de las 13:50? Si el gráfico suministrado hubiera sido el siguiente ¿cuál hubiera sido el valor esperado para la frecuencia cardiaca a las 14:00?



3. Supongamos ahora que la gráfica es la que sigue ¿cuál esperan Uds. que sea el valor de la frecuencia cardiaca a las 14:00?



En la actividad anterior tratamos con una función cuyo valor en un instante determinado (a las 14:00 horas) nos era desconocido. Sin embargo, teniendo en cuenta el comportamiento de la función en las cercanías de ese instante – esto es: en un pequeño intervalo antes y después de las 14:00 horas- encontramos un "valor esperado" para la función.
Ese "valor esperado" no cambia aun en el caso considerado en el punto 3, en el que el valor de la función a las 14:00 es conocido. El hecho de que esos

valores (el esperado y el real) fueran diferentes señala una anomalía que, en el contexto de la situación planteada, debería ser explicada.

Parece bastante claro que en cualquiera de los otros instantes incluidos en el dominio el valor esperado coincide con el valor de la función.

CONCLUSIONES

En el primer caso analizado, se ha querido evidenciar de qué manera ciertas concepciones sobre lo que la matemática es condicionan el modelo de enseñanza. Si se identifica a la matemática –o bien a la matemática a enseñar- con su presentación lógico deductiva, es bastante probable que deba adoptarse un modelo normativo de enseñanza. De la misma forma, la decisión de llevar adelante procesos de enseñanza y aprendizaje basados fuertemente en la actividad de los estudiantes, obliga a encontrar miradas sobre la matemática que tengan en cuenta los procesos de construcción históricos –siempre no lineales- y legalicen cierta heterodoxia, admitiendo que la búsqueda, el error y el debate (que son inseparables del aprendizaje) ocurran *dentro de la clase*.

BIBLIOGRAFÍA

1. Abate Stella M.; Badenes Anselmo R. (2001). Guía de Análisis de un texto impreso (apunte – libro de texto). Área pedagógica. Facultad de Ingeniería. UNLP.
2. Artigue Michèle; *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?"* en El futuro del cálculo infinitesimal, Grupo Ed. Iberoamericano, México, pags. 98 a 100.
3. Bertero María Fernanda; Trípoli María de las Mercedes (2006). Teoría de infinitesimales: historia, desarrollo y aplicaciones (Trabajo de iniciación a la investigación). Departamento de Matemática, Facultad. de Ciencias Exactas, UNLP.
4. Bucari Néstor; Abate Stella M.; Melgarejo Augusto (2004). Un cambio en la enseñanza de las matemáticas en las carreras de ingeniería de la UNLP: propuesta, criterios y alcances. *Anales del IV CAEDI*, Buenos Aires.
5. Bucari Néstor; Abate Stella M.; Melgarejo Augusto (2007). Estructura Didáctica e Innovación en Educación Matemática. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería* (ISSN 1515-5838) Año 8, Nº 14.
6. Charnay Roland. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas, en *Didáctica de Matemáticas. Aportes y Reflexiones.* Cecilia Parra e Irma Saiz (Comp.). Paidós Educador. pp 51-63.

7. Chevallard Yves. (2005). *La transposición didáctica*. Bs. As. Aique Grupo Editor.
8. Davis Philips J.; Hersh Reuben. *Experiencia Matemática.* 1989. España. Editorial Labor, S.A. pp 183-209.
9. Johsua Samuel; Dupin Jean-Jacques. 2005. *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática.* Bs. As. Ediciones Colihue, pp. 185-214
10. Lang, S.: *Cálculo*, Ed. Addison Wesley Iberoamericana, 1990, pags. 53 a 68.