RESOLUCION DE PROBLEMAS EN DISTINTOS ESCENARIOS

CARABALLO, HORACIO[1]; GONZÁLEZ, CECILIA ZULEMA[2]

[1] Bachillerato de Bellas Artes. Colegio Nacional. Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Universidad Nacional de La Plata.
[2] Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de La Plata.
[1] caraballohoracio@gmail.com
[2] cgonzalez@agro.unlp.edu.ar

RESUMEN

El uso de herramientas informáticas en la resolución de problemas matemáticos genera escenarios donde los métodos de resolución implican distintas competencias matemáticas, en este trabajo se muestran diversas variantes en la solución de un problema geométrico. El objetivo central es el estudio de los distintos marcos mentales involucrados y el valor didáctico de la multiplicidad de enfoques. La situación que se plantea tiene que ver con la intersección de rectas y las formas de resolución están ligadas a las aplicaciones que se utilizan. Con un sistema de matemática dinámica se trabaja con objetos y listas, con un sistema de calculo simbólico se obtiene la solución mediante un comando estructurado programado específicamente y finalmente se utiliza la simetría del problema para resolverlo deductivamente. Los esquemas mentales puestos en juego en cada una de las tres formas de resolución son distintos. El primer marco esta relacionado con la organización de la información y su posterior procesamiento, en el segundo hay programación del sistema para que ejecute las operaciones necesarias y por último, el método que podríamos llamar clásico, tiene que ver con el descubrimiento de la simetría del problema.

Palabras clave: matemática, software, resolución de problemas.

INTRODUCCION

Un marco de pensamiento es una representación que intenta guiar el proceso de pensamiento, organizándolo, apoyándolo y catalizando ese proceso (Perkins, 1986), en esta línea se intenta mostrar como, en la resolución de un problema, las distintas herramientas que se utilizan generan distintos registros de los objetos involucrados y diferentes estrategias mentales en pos de la solución.

La incorporación de tecnología informática a la enseñanza de la matemática cubre la necesidad de poner a disposición de docentes y estudiantes nuevas herramientas que facilitan la enseñanza y aprendizaje de conceptos y contenidos, ayudan a resolver problemas y lo que es más importante contribuyen a desarrollar nuevas capacidades cognitivas.

Las computadoras son herramientas esenciales para la enseñanza, el aprendizaje y el desarrollo de las matemáticas. Generan imágenes visuales de las ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y realizan cálculos de manera eficiente y precisa. Cuando disponen de herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden enfocar su atención en procesos de toma de decisiones, reflexión, razonamiento y resolución de problemas. (Santos Trigo, 2001)

Algunas de las posibilidades que brinda la utilización de este tipo de aplicaciones están relacionadas con la posibilidad de producir modificaciones, dar respuestas y requerir acciones, con inmediatez y fluidez, permite, entre otras cosas, la exploración dinámica de representaciones y el control de una secuencia de acciones. Múltiples formas de representación en un mismo medio (Azinian, 1998).

Las características citadas, además de permitir el desarrollo de ambientes de aprendizaje enriquecidos, abren nuevas ventanas al proceso de aprendizaje de los alumnos.

A continuación se resuelve un problema geométrico en tres contextos distintos, dos de ellos relacionados con el uso de software.

La primera solución se desarrolla en el entorno que proporciona GeoGebra, este programa permite trabajar con objetos relacionados dinámicamente, se tienen simultáneamente un registro algebraico y un registro gráfico de la situación.

La segunda versión utiliza como ambiente a Maxima que por ser un sistema de programación simbólica muestra la secuencia de comandos y las operaciones implicadas por estos, en este sentido es más austero que el anterior pero permite un control completo sobre la precisión utilizada.

Por último la solución llega utilizando papel y lápiz, pero no para realizar las cuentas de manera mecánica, esto seria muy engorroso, sino utilizando la simetría del problema. Este seria un contexto heurístico que requiere una cierta cuota de pensamiento lateral.

PROBLEMA GEOMETRICO

Enunciado

Se divide el primer cuadrante del plano en ángulos de 1º mediante 91 rectas que pasan por el origen. Las rectas son las dos que coinciden con los ejes y otras 89 más. Se traza la recta que intersecta a los ejes en los puntos (10,0) y (0,10) y se consideran los puntos de intersección de esta recta con las 91 trazadas anteriormente. El problema consiste en hallar la suma de las primeras coordenadas de estos puntos. En la Figura 1 se representa la situación, la solución es la suma de todos los Xi.

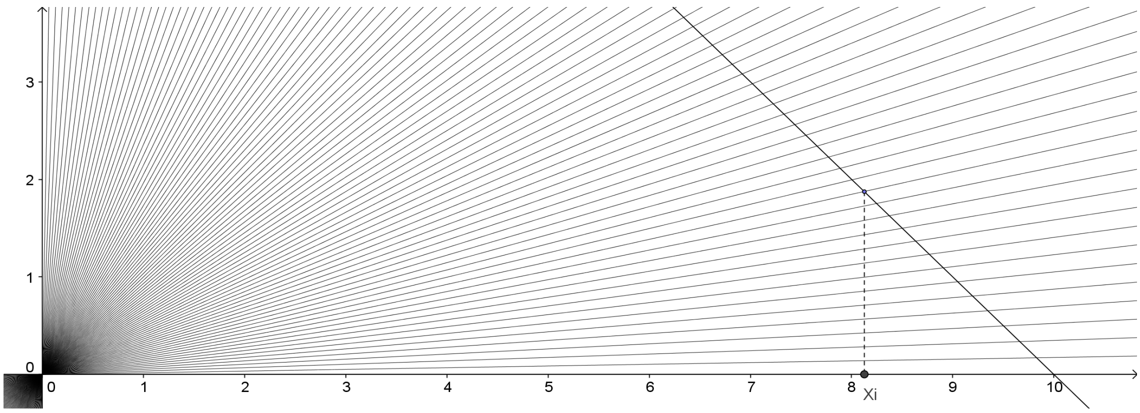


Figura 1: Representación gráfica del problema

Este problema es una adaptación de un enunciado tomado de la propuesta semanal de la Olimpíada Matemática Argentina (Fauring y Gutiérrez, 2012).

Planteo de la solución

La solución pasa por encontrar los puntos de intersección entre la recta que intersecta a los ejes en los puntos (10,0) y (0,10) con cada una de las rectas que pasan por el origen y luego sumar las abscisas de estos 91 puntos de intersección.

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ y = \tan\left(\frac{\pi}{180} i\right) x \end{cases}$$

Con i que toma valores entre 0 y 89. El valor 90 se excluye porque la tangente no está definida, siendo en este caso la recta vertical y su abscisa es nula.
Los valores de *x,* solución de cada uno de los sistemas, son:

$$Xi = \frac{10}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{180} i\right)}$$

Finalmente se calcula la suma de todos los *Xi*

SISTEMA DE MATEMATICA DINAMICA

Elección del software

La aplicación que utilizamos es GeoGebra, el motivo de la elección es que el programa está instalado en las netbooks de Conectar Igualdad y tiene licencia GNU (General Public License v2), es un software libre de matemática para la educación en todos sus niveles, disponible en múltiples plataformas. Reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único entorno, sencillo a nivel operativo y muy potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. (Hohenwarter, 2012).

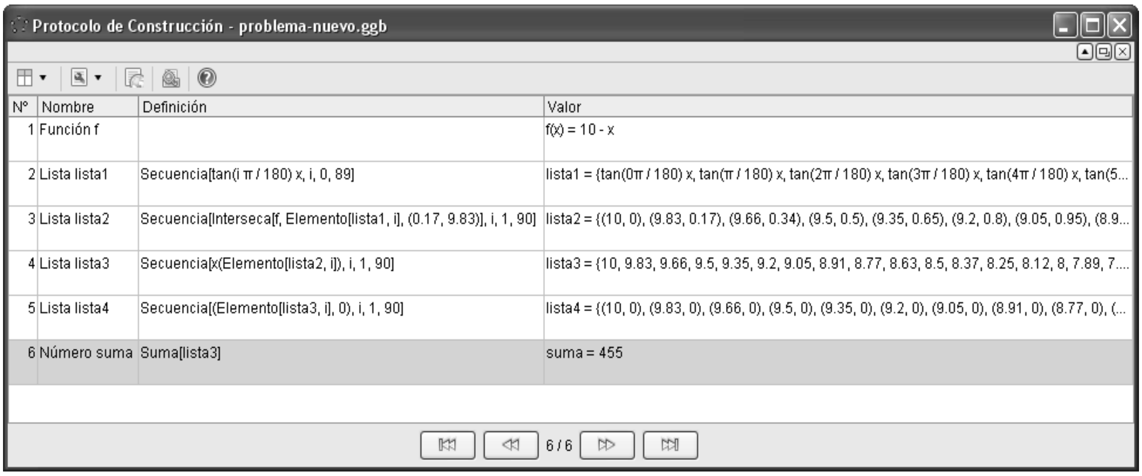
Resolución del problema usando GeoGebra

Para resolver el problema en este entorno se utilizan los comandos: **Secuencia** para generar varias listas, **Interseca** para hallar los puntos de intersección entre las rectas, **Elemento** para seleccionar elementos de una lista y **Suma** para sumar todos los elementos de una lista.

Secuencia[Expresión, Variable i, Número a, Número b]: Establece una lista de objetos creados desde la expresión dada y el índice i que varía en el rango que va del número a al b.

Suma[Lista]: Calcula la suma de todos los elementos de la lista. (Hohenwarter y Preiner 2007)

En la Figura 2 aparece la secuencia de comandos que se introducen en la línea de entrada, primero se define la recta $y = 10 - x$, luego se genera la lista1 que produce las rectas por el origen, en tercer lugar se genera la lista2 con todos los puntos de intersección, en la lista3 se selecciona de la lista2 la primera coordenada, en la lista4 se crean los puntos sobre el eje x con un propósito gráfico, finalmente se suman los elementos de la lista3 para obtener el resultado del problema.


Protocolo de Construcción - problema-nuevo.ggb

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Función f		f(x) = 10 - x
2	Lista lista1	Secuencia[tan(i π / 180) x, i, 0, 89]	lista1 = {tan(0π / 180) x, tan(π / 180) x, tan(2π / 180) x, tan(3π / 180) x, tan(4π / 180) x, tan(5...
3	Lista lista2	Secuencia[Interseca[f, Elemento[lista1, i], (0.17, 9.83)], i, 1, 90]	lista2 = {(10, 0), (9.83, 0.17), (9.66, 0.34), (9.5, 0.5), (9.35, 0.65), (9.2, 0.8), (9.05, 0.95), (8.9...
4	Lista lista3	Secuencia[x(Elemento[lista2, i]), i, 1, 90]	lista3 = {10, 9.83, 9.66, 9.5, 9.35, 9.2, 9.05, 8.91, 8.77, 8.63, 8.5, 8.37, 8.25, 8.12, 8, 7.89, 7....
5	Lista lista4	Secuencia[(Elemento[lista3, i], 0), i, 1, 90]	lista4 = {(10, 0), (9.83, 0), (9.66, 0), (9.5, 0), (9.35, 0), (9.2, 0), (9.05, 0), (8.91, 0), (8.77, 0), (...
6	Número suma	Suma[lista3]	suma = 455

6 / 6

Figura 2: Secuencia de entradas en GeoGebra

En la Figura 3 aparece la vista algebraica que produce la ejecución del código anterior y en la Figura 4 aparecen los registros gráficos de los objetos anteriores.

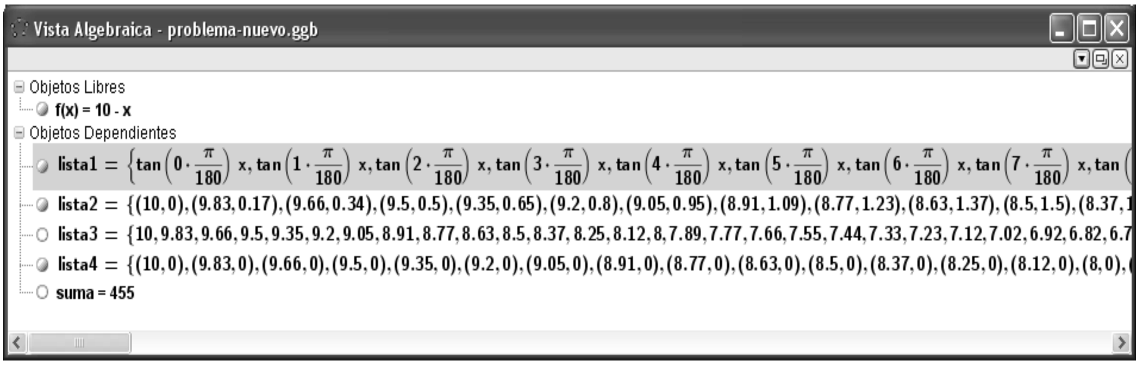


Figura 3: Vista algebraica en GeoGebra

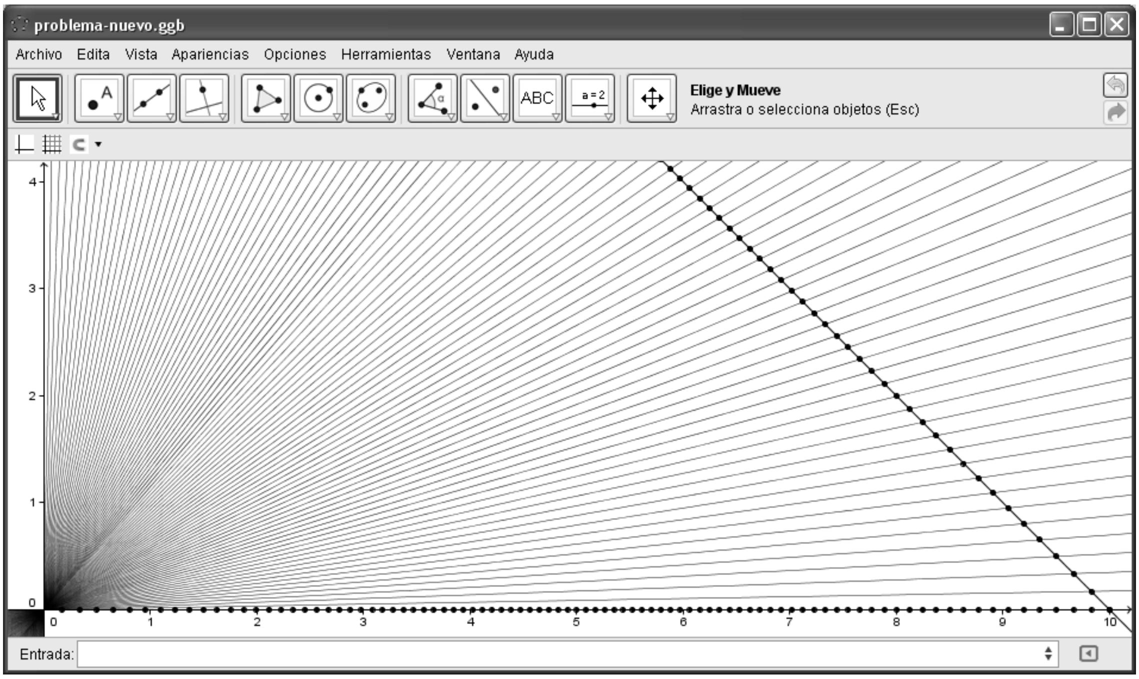


Figura 4: Vista gráfica en GeoGebra

La respuesta al problema se puede leer en la ventana algebraica (Figura 3) donde dice: suma = 455

SISTEMA DE CALCULO SIMBOLICO

Elección del software

Nos inclinamos por wxMaxima por idénticos motivos que antes. Este es un entorno gráfico, que permite ejecutar el programa Maxima de forma indirecta, posee licencia libre y se puede instalar de forma complementaria y constituye un ambiente mas amigable para el usuario que la consola de Maxima (Rodríguez Galván, 2007)

Maxima es un sistema para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas, incluyendo diferenciación, integración, expansión en series de Taylor, transformadas de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones lineales, y vectores, matrices y tensores. Produce resultados con alta precisión usando fracciones exactas y representaciones con aritmética de coma flotante arbitraria. Adicionalmente puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones. (Rodríguez Riotorto, 2011)

Resolución del problema usando wx Máxima

Máxima resuelve el problema con una única sentencia:
Se inicializa una variable s en 0:
s:0$
Se ejecuta una iteración sobre i desde cero a ochenta y nueve con paso uno actualizando el valor de s con la solución de la ecuación que da la abscisa del punto de intersección de las rectas:
for i:0 thru 89 do s:s+solve([tan(i*%pi/180)*x=10-x], [x]);
En la Figura 5 se ve la salida donde se anuncia la ejecución del código.

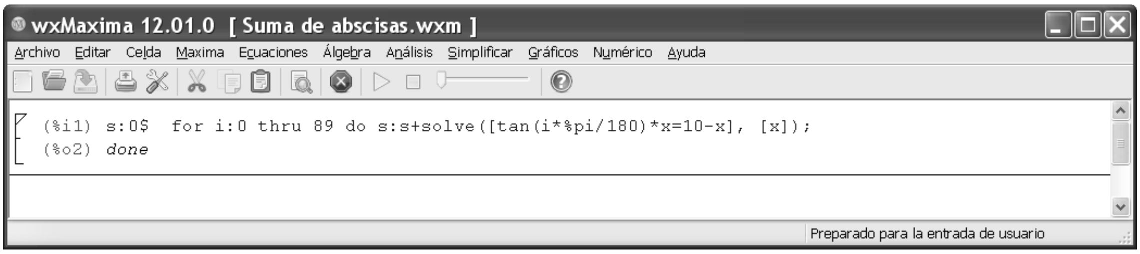


Figura 5: Suma de las abscisas

En la Figura 6 se ve el resultado de la suma.

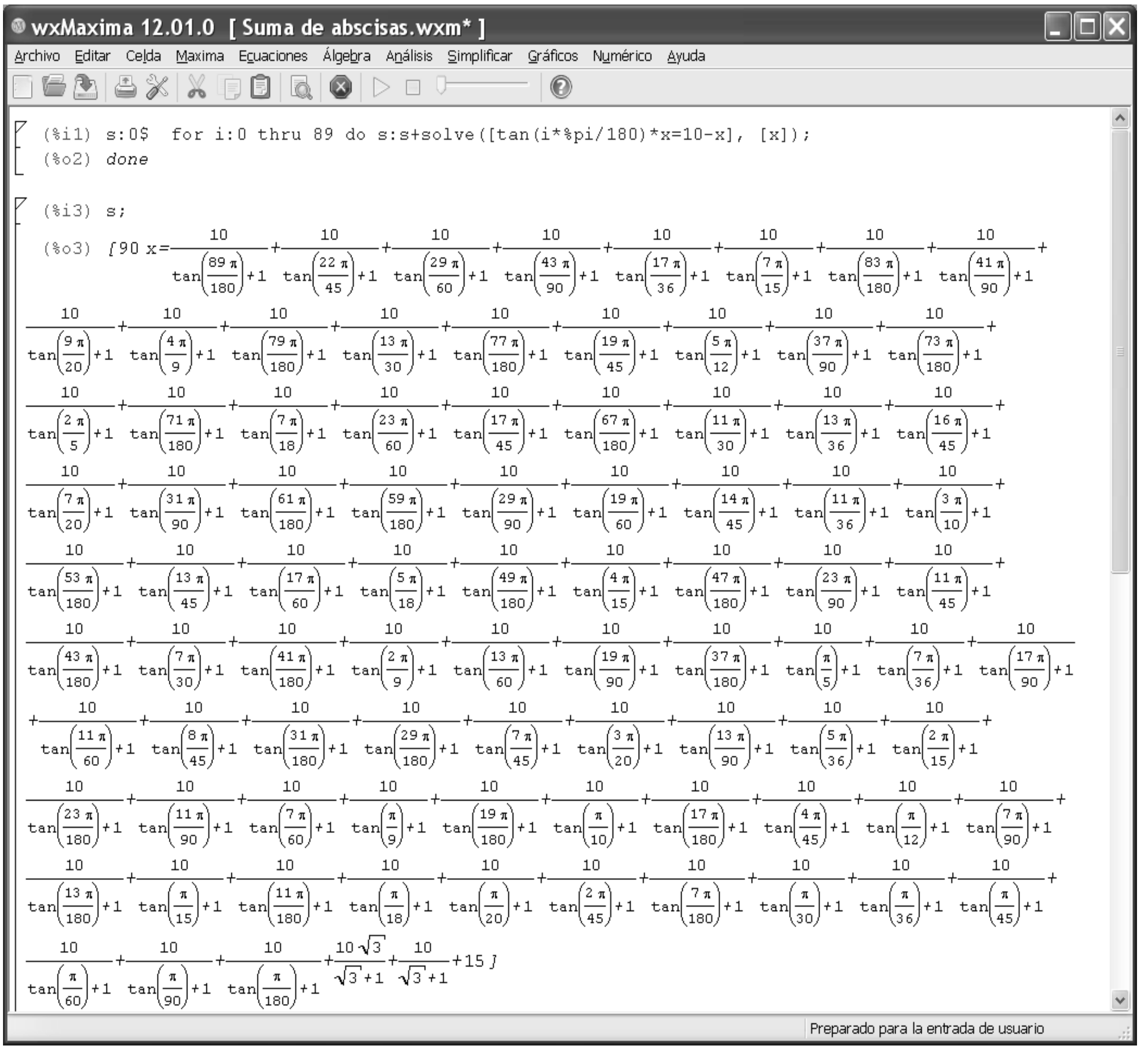


Figura 6: Resultado de la suma de las abscisas

Máxima muestra el resultado de la suma en modo simbólico, para calcular de manera numérica se ejecuta el comando float (Figura 7)

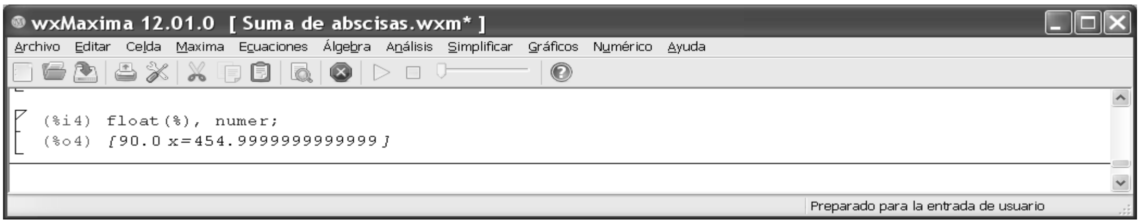


Figura 7: Resultado aproximado de la suma de las abscisas

El resultado del problema figura en la última línea de salida siendo 454.9999999999999

SIMETRIA. RESOLUCION DEDUCTIVA

En esta sección resolveremos el problema prestando atención a la simetría por pares de las rectas respecto de *y=x* y la hecho de la perpendicularidad de *y=10 – x* con *y = x*.

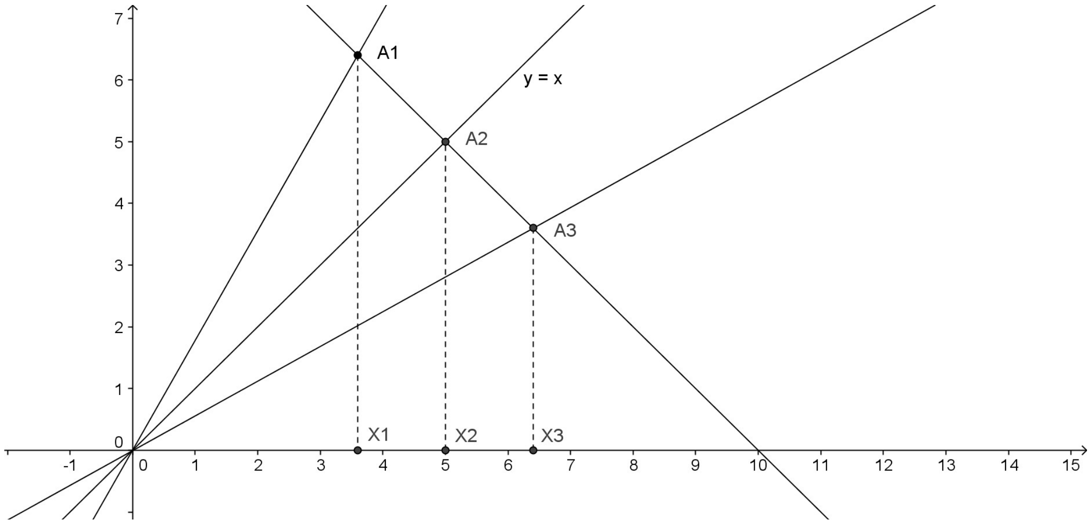


Figura 8: A2 *es el punto medio entre* A1 *y* A3

En la Figura 8 las rectas por el origen que pasan por *A1* y por *A3* son simétricas respecto de *y=x* luego los triángulos *A1OA2* y *A2OA3* son congruentes y por lo tanto *A2* es el punto medio entre *A1* y *A3*, luego *X2* es el punto medio entre *X1* y *X3*, esto es:

$$X2 = \frac{X1+X3}{2} \longrightarrow X1+X3 = 2X2$$

Como *A2* es el punto de intersección entre la recta *y=x* y la recta *y=10 - x* sus coordenadas son (5,5) luego *X2=5* y por lo tanto *X1+X3=10*.
Hay 45 rectas con pendientes menores que uno (que corresponden a los ángulos que van de 0º a 44º) y 45 rectas con pendientes mayores que uno (que corresponden a los ángulos que van de 46º a 90º), cada pareja simétrica aporta 10 a la suma que resulta 450, la abscisa *X2* es 5, el resultado final es 455.

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

El problema que elegimos podría complicarse aparentemente dividiendo el primer cuadrante en sectores angulares de un segundo de grado lo que nos propondría 324001 rectas por lo tanto tendríamos la misma cantidad de puntos de intersección con la recta *y = 10 – x* sin embargo las tres modos de resolución cambiarían muy poco. Diferente seria si se afecta la simetría del problema reemplazando la recta *y = 10 – x* por la recta *y = 10 –2x* las dos primeras soluciones seguirían aplicándose de la misma manera mientras que la tercera forma de resolución no seria aplicable.
Cuando se plantea un problema de este tipo y además se proponen los entornos de trabajo se produce un efecto sinérgico que facilita la solución en un contexto cuando ya se la ha obtenido en otro. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, es probable que si se trabaja la

solución del problema en GeoGebra la vista gráfica de los objetos desencadene la idea que permite resolver el problema como fue presentado en tercer término.

Los marcos mentales que presentan los tres entornos considerados son diferentes. Con un programa de matemática dinámica se obtienen los objetos que intervienen en la solución y se opera algebraicamente con ellos, en forma paralela el programa muestra los aspectos gráficos correspondientes, las representaciones mentales integran los aspectos algebraicos y geométricos como un todo. Con un sistema de algebra computacional la posibilidad es programar la tarea con un lenguaje de alto nivel, con un control del calculo simbólico y la precisión numérica muy grande, los procesos mentales son mas abstractos y carecen de elementos visuales. La solución obtenida utilizando la simetría es la que requiere una componente de creatividad mayor y las ideas que se ponen en juego están, de algún modo, en segundo plano, en un determinado momento todo se conecta y la solución se presenta de modo completo. En el último caso las ideas que se conectan, que tienen una fuerte carga visual, son: la perpendicularidad entre la recta $y = 10 - x$ y la recta $y = x$, la existencia de parejas de rectas simétricas respecto de $y = x$, el hecho que el punto de intersección entre $y = 10 - x$ y la recta $y = x$ es el punto medio de los puntos de intersección entre $y = 10 - x$ y las rectas simétricas, que la abscisa del primer punto es el punto medio de las abscisas de los otros dos, que la suma de estas abscisas es igual al doble del punto medio y que esto ultimo permite hacer la suma que resuelve el problema de un modo simple.

La propuesta de resolución de un problema en distintos contextos, que pueden estar mediados por herramientas informáticas o no, posibilitan la integración de distintos marcos de pensamiento y esto enriquece la situación didáctica. Puede presentarse el escollo de la falta de familiaridad y manejo de los alumnos con el software que se utilice, en este caso cabe asistir la tarea en pos de los beneficios que conlleva.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azinian, H. (1998) *Capacitación docente para la aplicación de la información en el aula de geometría.* Acta do IV Congresso Ibero-americano de Informática na Educação, Brasília.

Fauring, P. y Gutiérrez, F. (2012) *Problemas semanales. OMA.* http://www.oma.org.ar/ junio de 2012

Hohenwarter, M. (2012) *¿Qué es GeoGebra?* http://www.geogebra.org/cms/es/info junio de 2012

Hohenwarter, M. y Preiner, J. (2007) *GeoGebra. Manual Oficial de la versión 3.0* http://www.geogebra.org. junio de 2012

Perkins, D. N. (1986) Thinking Frames. *Educational Leadership*, 43(8): 4-10

Rodríguez Galván, J.(2007) *Maxima con wxMaxima: software libre en el aula de matemáticas.* Oficina de Software Libre de la Universidad de Cádiz

Rodríguez Riotorto, M. (2011) *Primeros pasos en Maxima*
http://riotorto.users.sourceforge.net junio de 2012

Santos Trigo, L. (2001) Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva.* 20: 247-258.