

Aspectos semióticos y lingüísticos en Didáctica de la Matemática

Mabel Panizza

CBC

(Ciclo Básico Común)

Universidad
de Buenos Aires

Jean-Philippe Drouhard

IUFM

(Institut Universitaire de
Formation des Maîtres)

Université de Nice-
Sophia-Antipolis

<http://sites.google.com/site/jeanphilippedrouhard>



¿Por qué una semiótica?

- En su presentación de ayer, Andrea Novembre nos habló de algunas expresiones de sus alumnos: “*que los docentes no nos humillen cuando nos equivocamos en algo obvio*”
- Es cierto que es humillante equivocarse en algo obvio
- Daniel Lacombe: fracasar en matemática elemental es imperdonable bajo el supuesto de que la matemática es “simple”



¿Por qué una semiótica?

- ¿Que hay tan difícil en una matemática donde los conceptos son tan elementales, entonces?
- La dificultad no está en los conceptos sino en su representación
- O sea, el problema es semiótico.



Lenguaje y representaciones semióticas en la teoría de los campos conceptuales

un concepto es un triplete de tres conjuntos:

$C(S, I, G)$

S: conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia)

I: conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado)

G: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).

(Vergnaud, 1990)

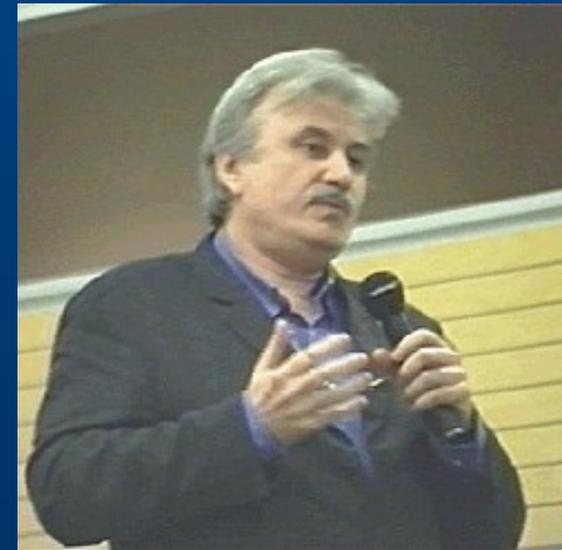


G. Vergnaud



Lenguaje y representaciones semióticas en la TAD

- Los objetos ostensivos (del latín “ostendere”, presentar con insistencia), son aquellos objetos que se perciben: se ven, se tocan, se oyen etc. Son, en definitiva, los objetos materiales o los objetos dotados de cierta materialidad como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos etc.
- (Bosch , 2003)



Y. Chevallard



Lenguaje y representaciones semióticas en la TSD

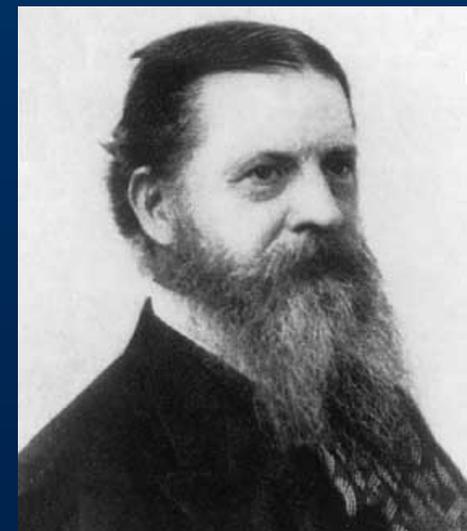


- Si bien la TSD no teoriza sobre las representaciones, la situación de formulación concierne directamente a la formulación de mensajes en un sistema de representación.



El enfoque semiótico de Peirce

- Toda síntesis proposicional implica una relación significativa, una semiosis (la acción del signo), en la que se articulan tres elementos:
 - El signo o representamen (que es el nombre técnico que emplea Peirce)
 - El objeto
 - El interpretante

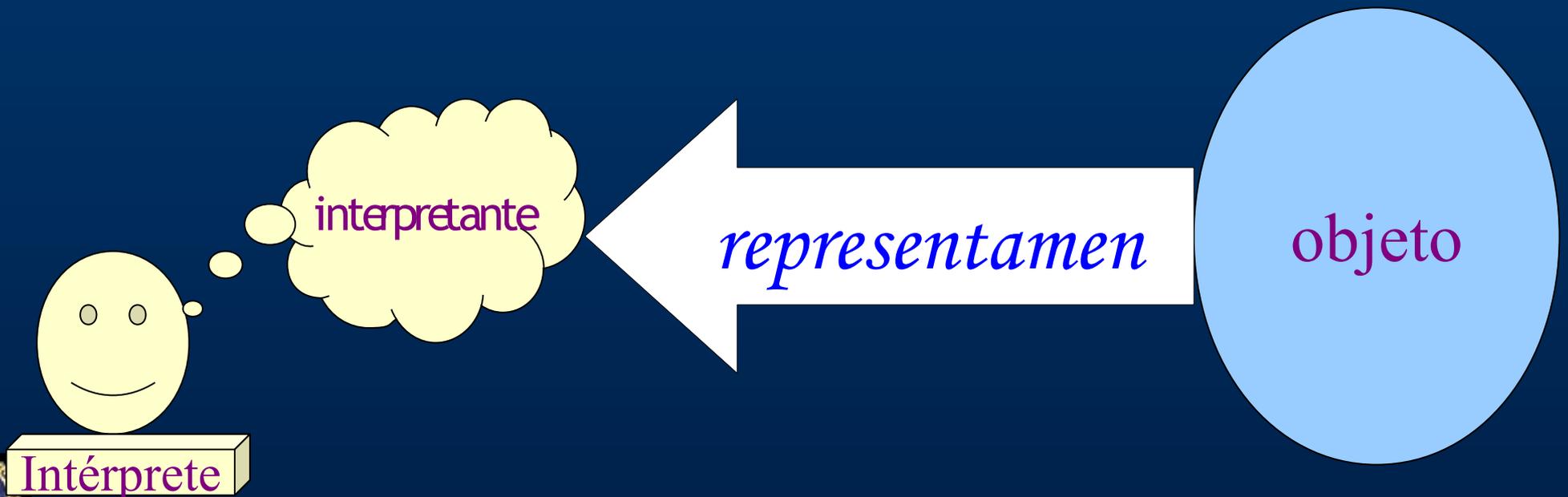


[Wenceslao Castañares, Wikipedia](#)

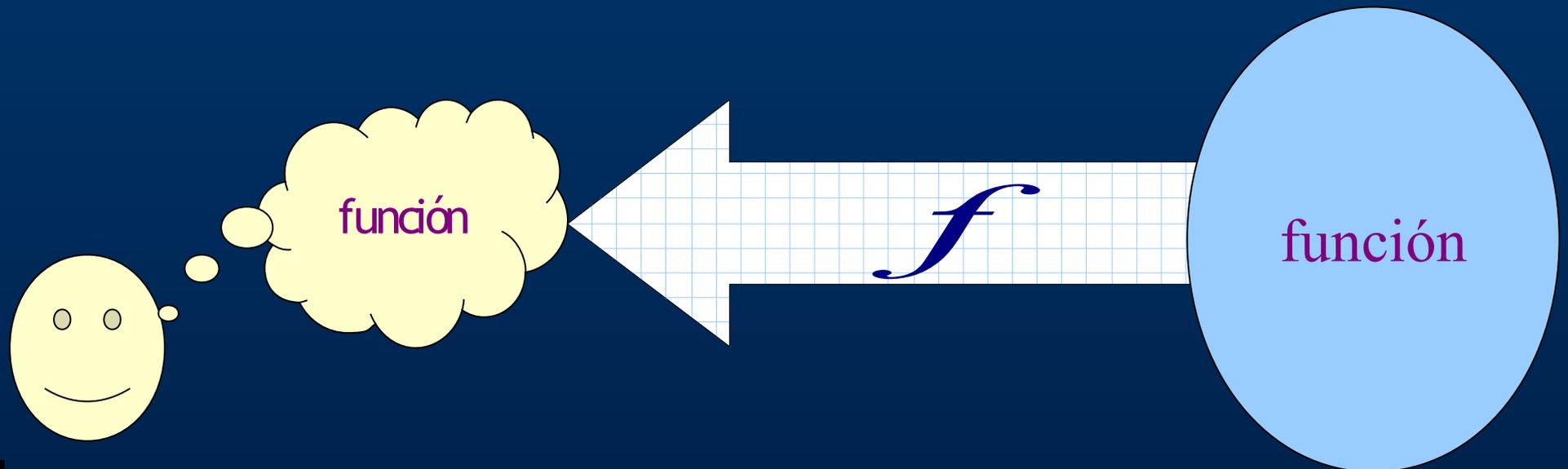


Esquema de la semiosis

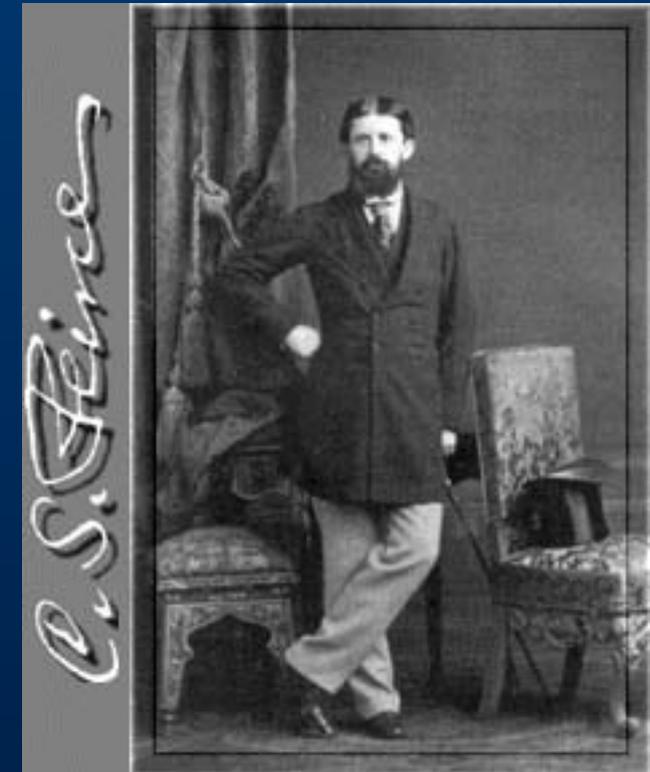
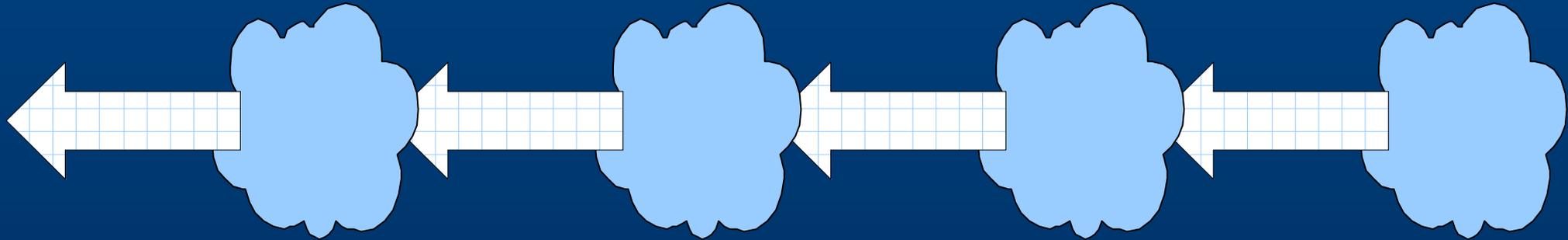
- algo que está para alguien en lugar de algo bajo algún aspecto o capacidad. Se dirige a alguien, esto es, crea en la mente de esa persona un signo equivalente o quizá un signo más desarrollado



Signo matemático

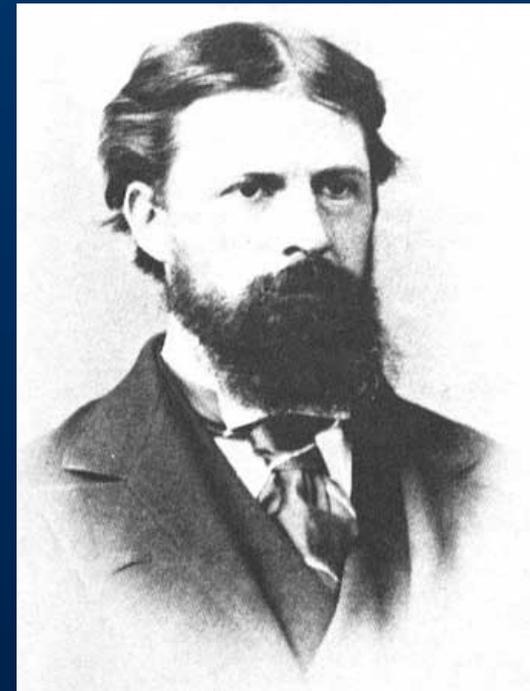


Cadena infinita de la semiosis



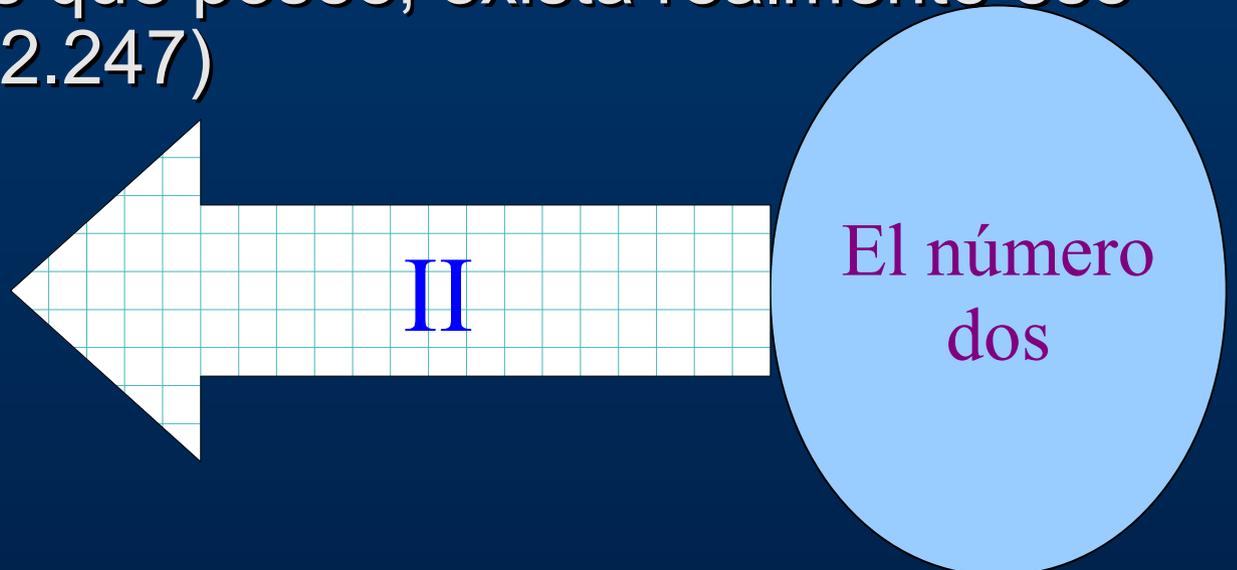
Clasificación peirceana de los signos

- Peirce distingue tres tipos principales de signos:
 - Íconos
 - Índices
 - Símbolos



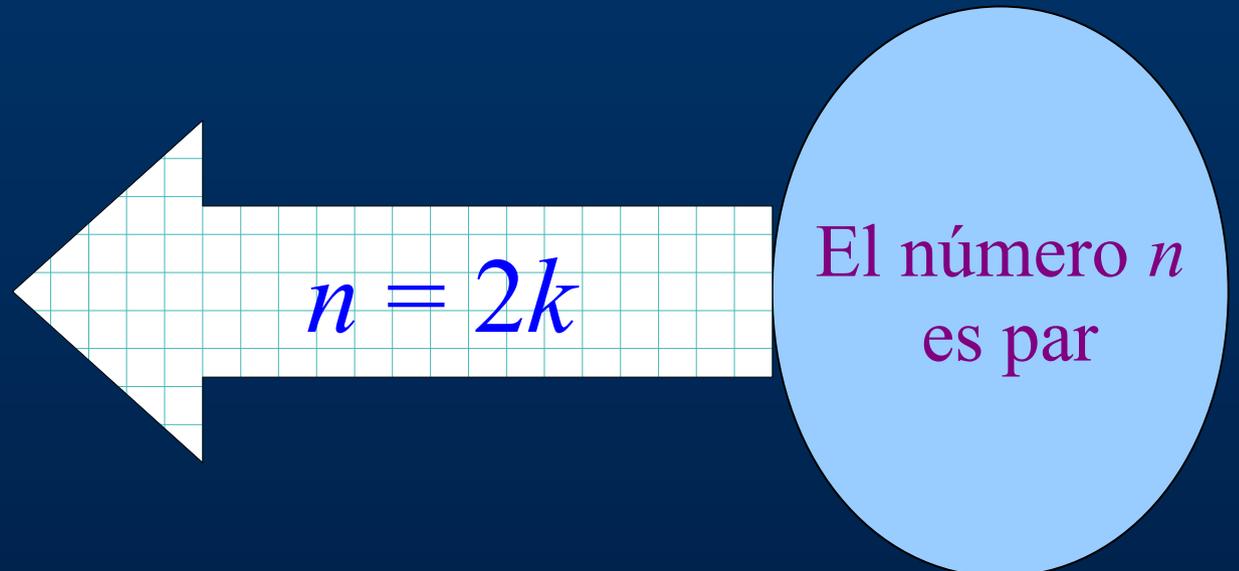
Íconos

- El ícono es un signo que mantiene con su objeto una relación de similitud o semejanza.
 - «Un icono es un signo que remite al objeto que denota simplemente en virtud de las características que posee, exista realmente ese objeto o no» (2.247)



Índice

- «Los index son signos cuya relación con sus objetos consiste en una correspondencia de hecho» (1.558)



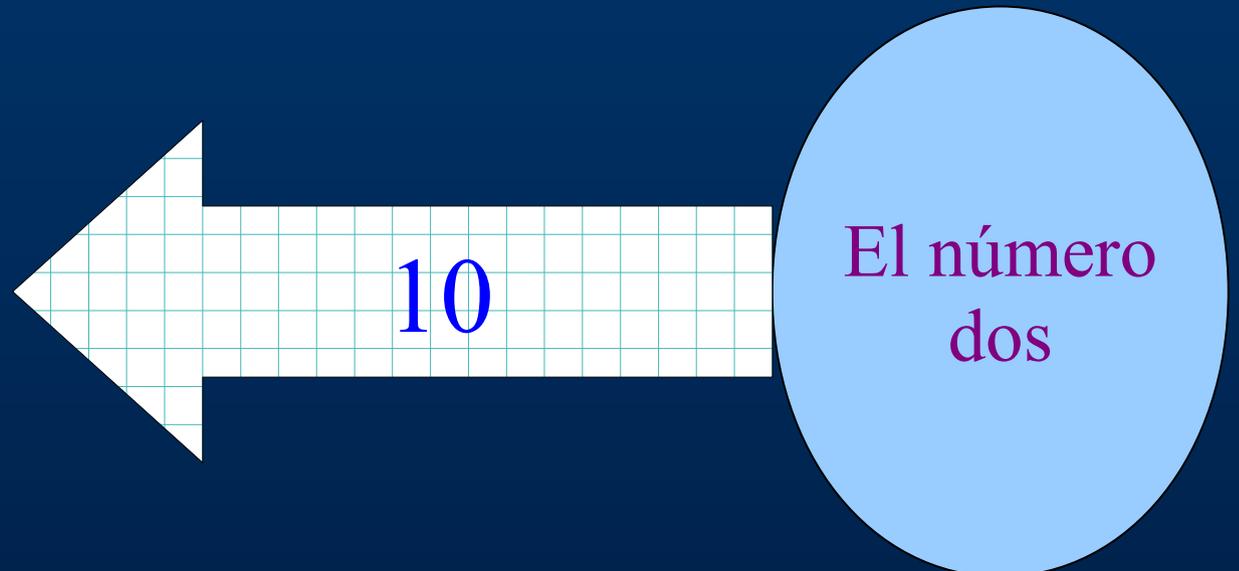
Símbolos

- Hay 10 tipos de personas:
- las que saben contar en binario, y las otras.

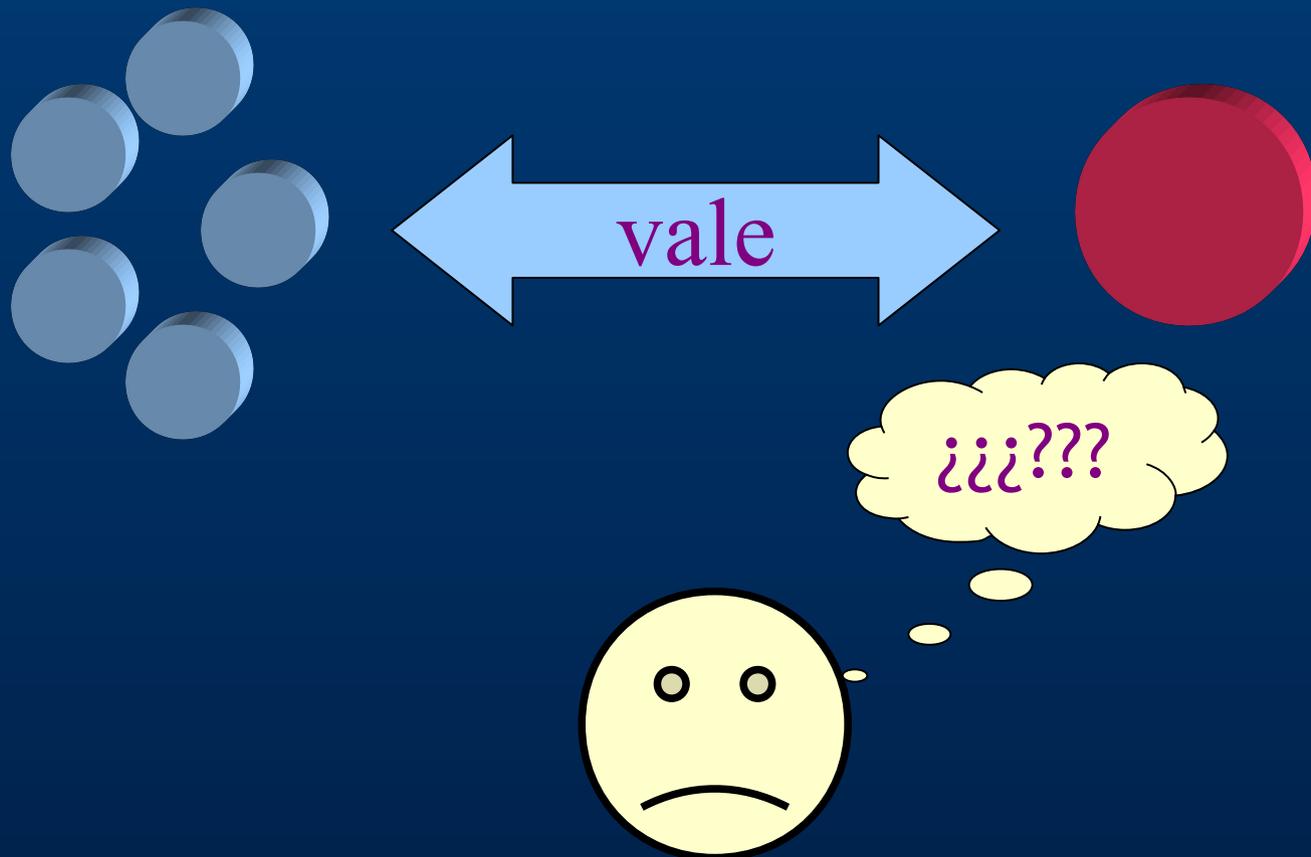


Símbolos

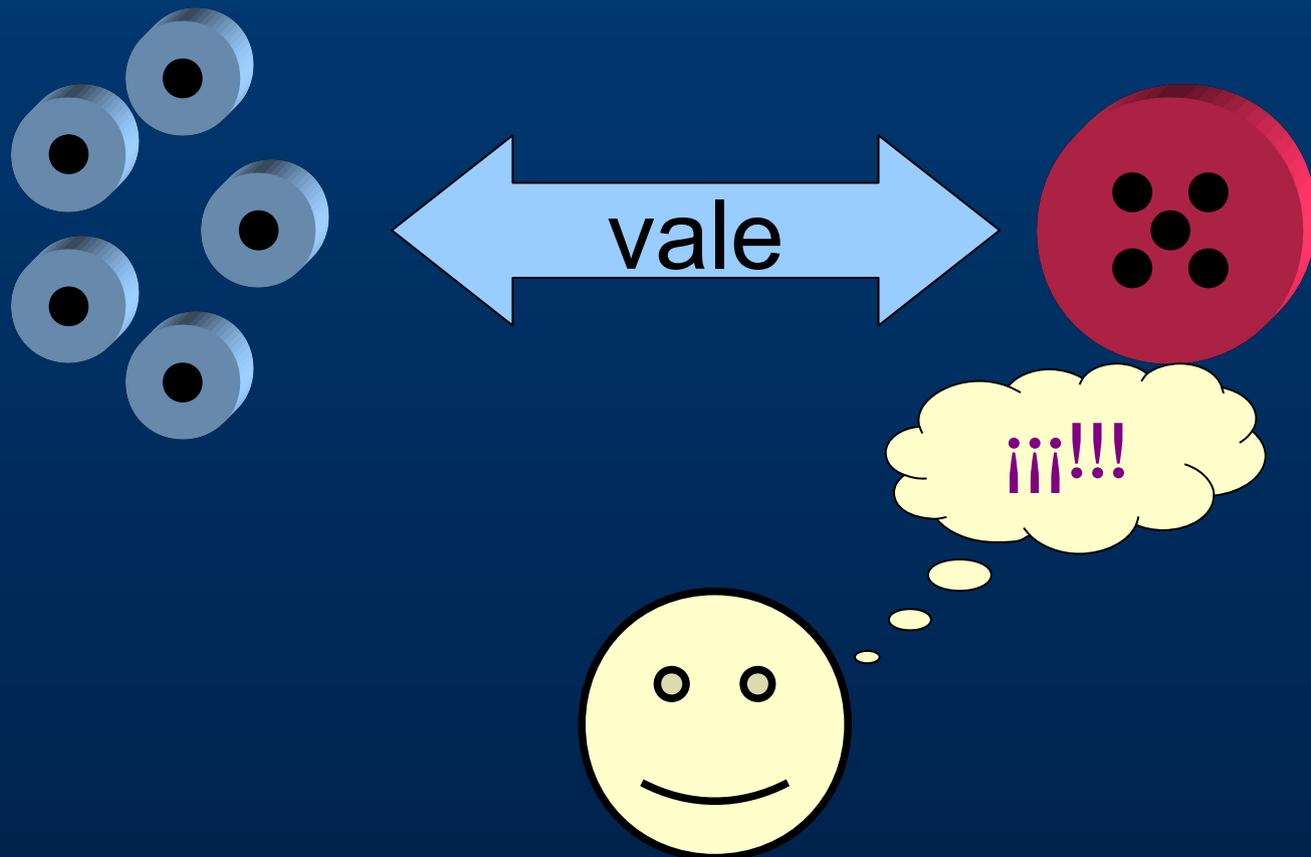
- «Un símbolo es un signo que remite al objeto que denota en virtud de una ley, de ordinario una asociación de ideas generales, que determina la interpretación del símbolo por referencia a este objeto. Es, pues, en sí mismo un tipo general o una ley» (2.249)



Un problema didáctico: forzar el simbolismo



Importancia de la iconicidad



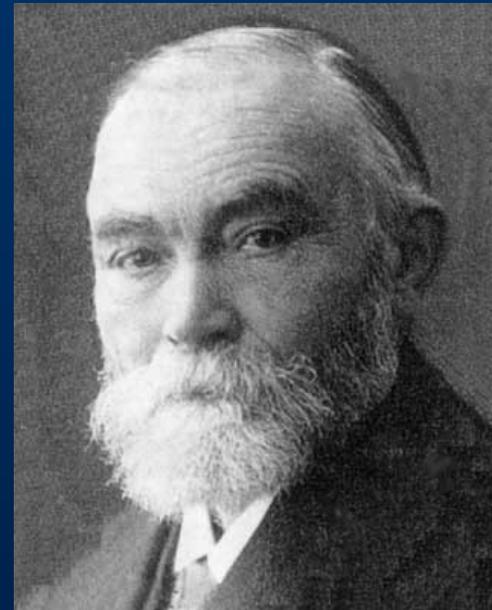
El carácter relativo del tipo de signo

- Un signo no “es” para siempre un ícono, un símbolo o un índice.
- Más bien un signo es **usado** como ícono, símbolo o índice.
- Ejemplos: “cuadrado”, “2” ...
- El alumno debe aprender a manejar esta flexibilidad característica del ser humano como ser semiótico.

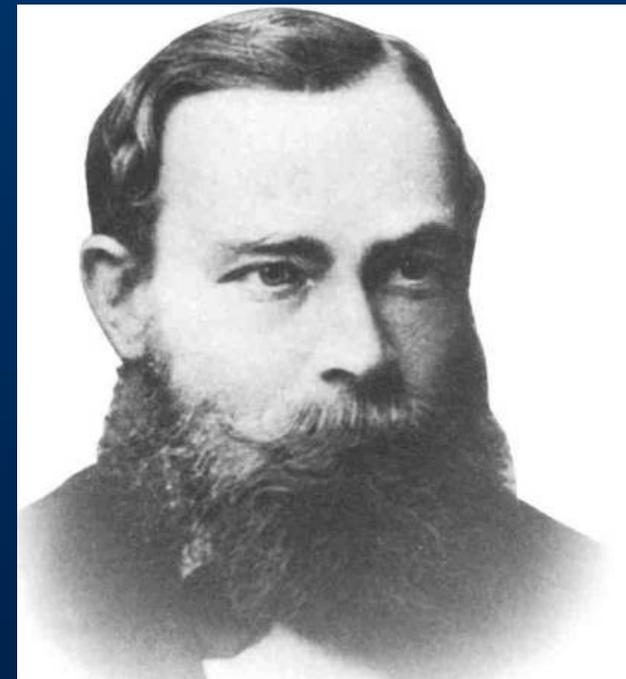


El enfoque semiótico de Frege

- Una de sus principales aportaciones es la distinción que establece entre **sentido** y **denotación** (Frege, 1891, 1892).
- En su noción de significado hay tres componentes: el signo, su sentido y su denotación



- El sentido de un signo es el modo de presentación de la denotación
- Las diferentes maneras de denotar un objeto corresponden entonces a diferentes maneras de presentar el objeto.



- Dice Duval (1998):

- ...esta distinción es esencial. Explica la posibilidad del progreso discursivo y de los cálculos. Es porque los objetos pueden ser designados de diferentes manera que, de una frase a otra o de una equivalencia a otra, los discursos y los cálculos no se encierran en puras tautologías.



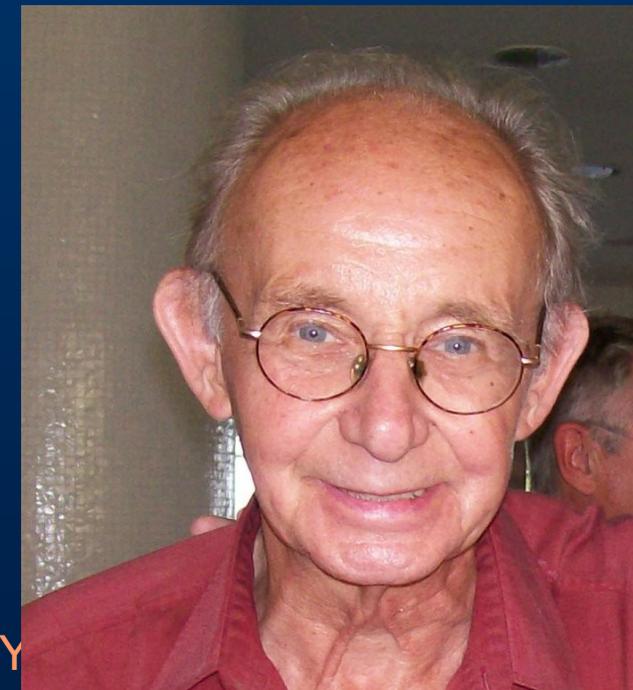
- Esta frase de Duval contiene tres aspectos fundamentales de la distinción de Frege :
 - el hecho de que la noción de sentido puede ser introducida gracias a la posibilidad de denotar un objeto de diferentes maneras.
 - en esa posibilidad residen el razonamiento y el cálculo, los que se realizan a partir de las substituciones de unas expresiones por otras conservando la denotación y con diferente sentido.
 - que si dichos razonamientos y cálculos constituyen un progreso discursivo (“no se encierran en puras tautologías”) es porque las expresiones resultantes de dichas substituciones contienen una información nueva del objeto designado.



- Dice Anthony Kenny (en *Introducción a Frege*, 1995)
 - Si conociéramos todo lo que es posible conocer acerca de un objeto sabríamos qué sentidos servirían para identificarlo y cuáles no



- Dicen Todorov y Ducrot (*Diccionario Enciclopédico de las Ciencias del Lenguaje*) al presentar la teoría de Frege:
 - □...□ Frege distingue el referente de una expresión, o sea el objeto que designa, de su sentido, o sea la manera en que la expresión designa ese objeto, las informaciones que da sobre él para permitir identificarlo.



- Es decir que Ducrot y Todorov ponen en evidencia que las informaciones provistas por los diferentes sentidos –es decir las diferentes maneras de presentar al objeto designado– servirían para identificar el referente



- Y también afirman:
 - Frege enfatiza la importancia del sistema en el cual los signos son expresados. Dicho de otra manera, el conocimiento expresado por el sentido es un conocimiento en un sistema particular de signos (el conocimiento del sentido de una expresión forma parte del conocimiento de la lengua)



Un sistema semiótico es un
Registro de Representación Semiótica
si permite las siguientes actividades:

- 1. Constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado (formulación)
- 2. Transformar las representaciones de acuerdo con las reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones dentro del sistema (tratamiento)
- 3. Convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en representaciones en otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado (conversión)



Transformaciones Semióticas

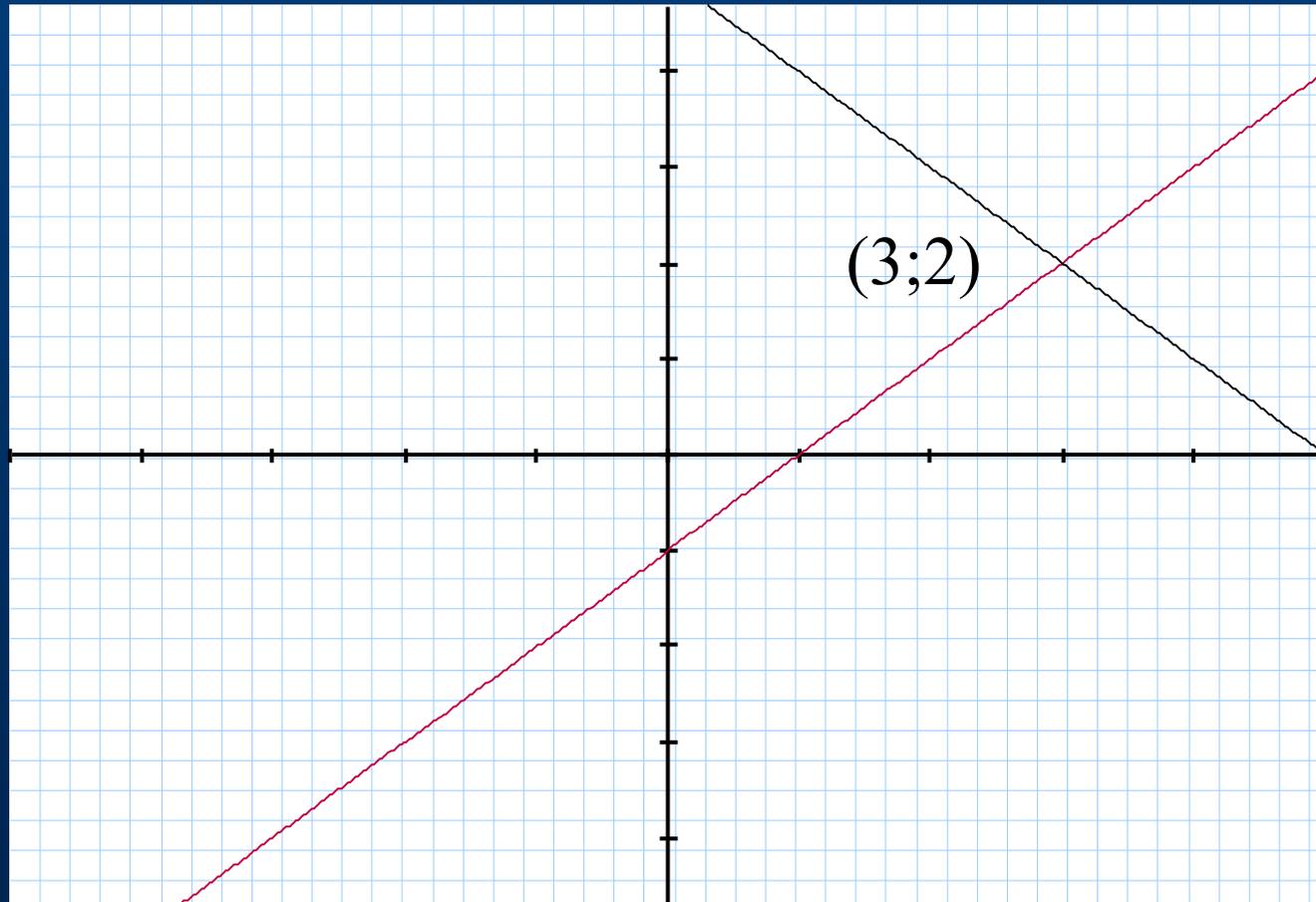
- Los **tratamientos** movilizan un sólo registro de representación, y se realizan por medio de las reglas propias del sistema.
- Las **conversiones**, por el contrario, no se realizan por medio de reglas. Suponen la identificación de unidades significantes.



Raymond Duval



un tratamiento



Otro tratamiento

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x+5 \end{cases}$$

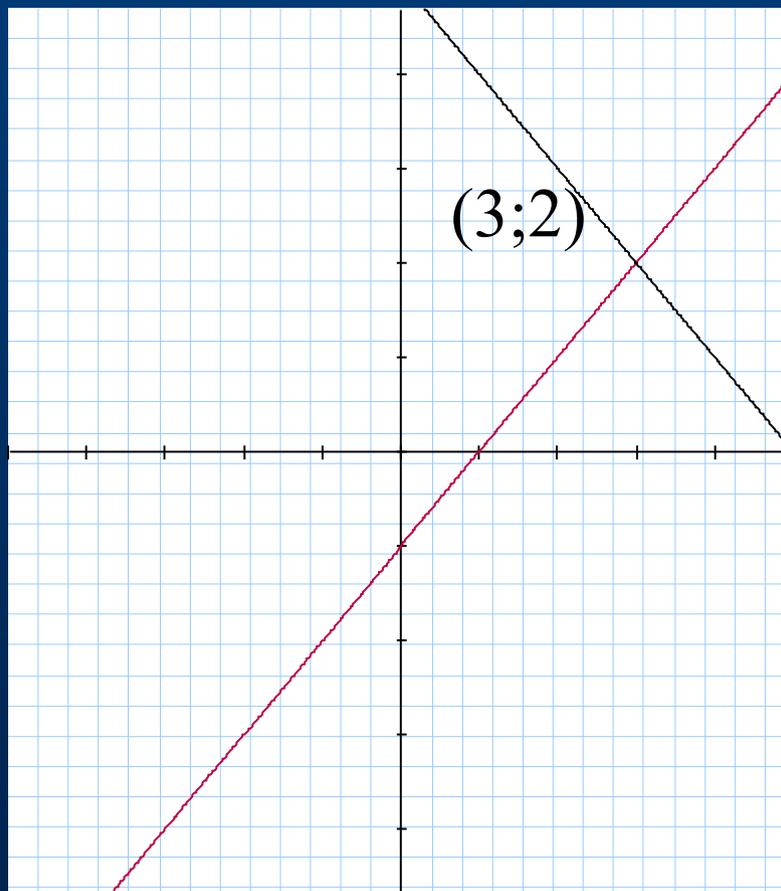
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = x-1 \end{cases}$$



una conversión

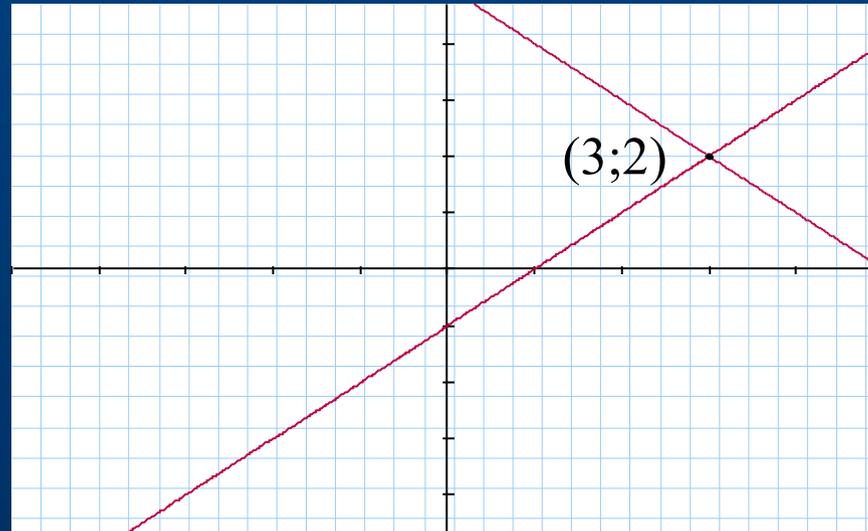
(3,2)

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x+5 \end{cases}$$

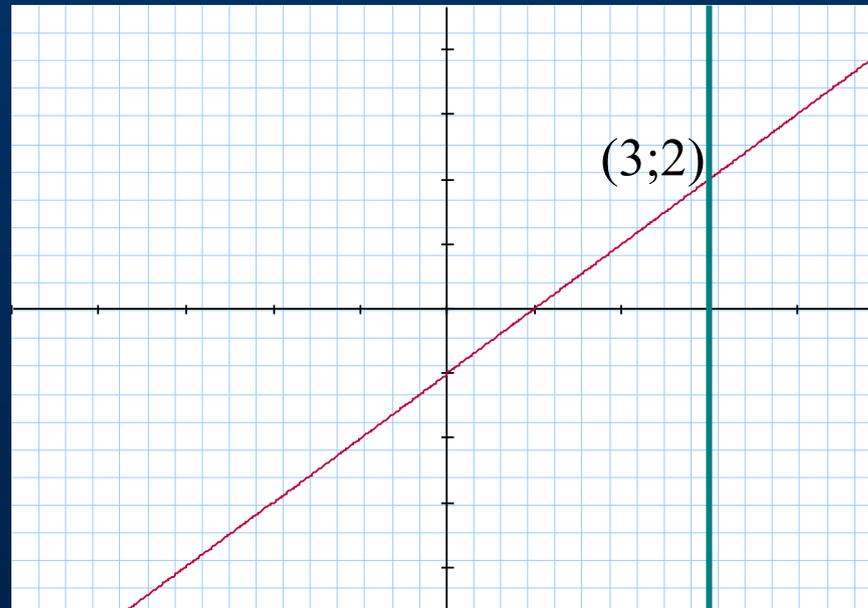


Variaciones concomitantes por conversión

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x+5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = 3 \\ y = x-1 \end{cases}$$

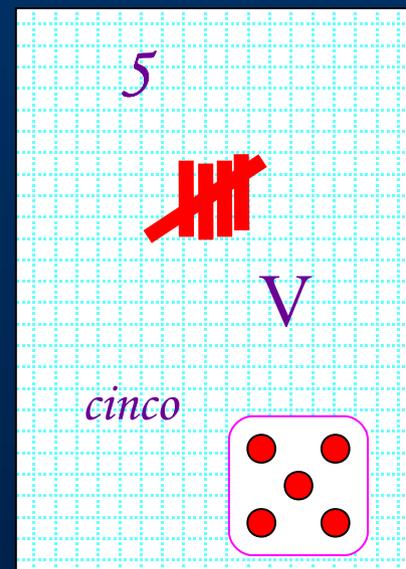


Registros y Lenguajes en matemática.

- El “lenguaje” matemático se compone de lenguaje natural, lenguaje formal y representaciones no lingüísticas (Laborde)

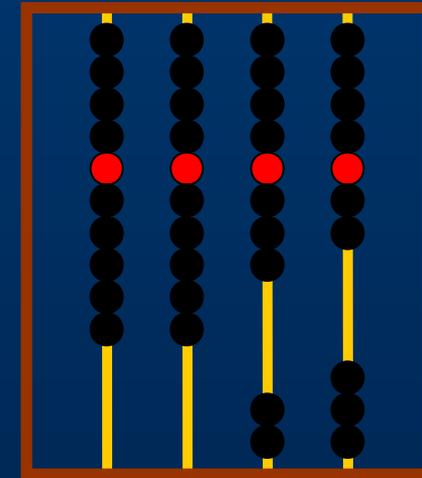
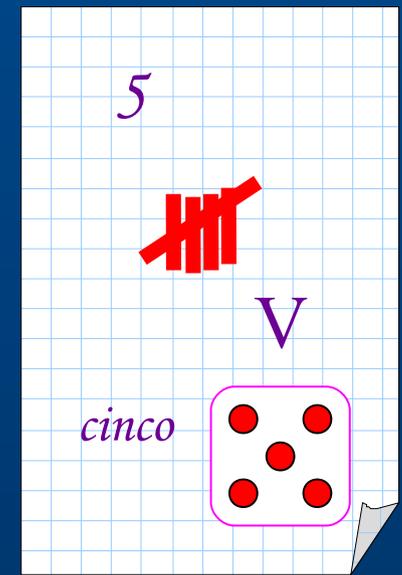


Colette Laborde



registros digitales

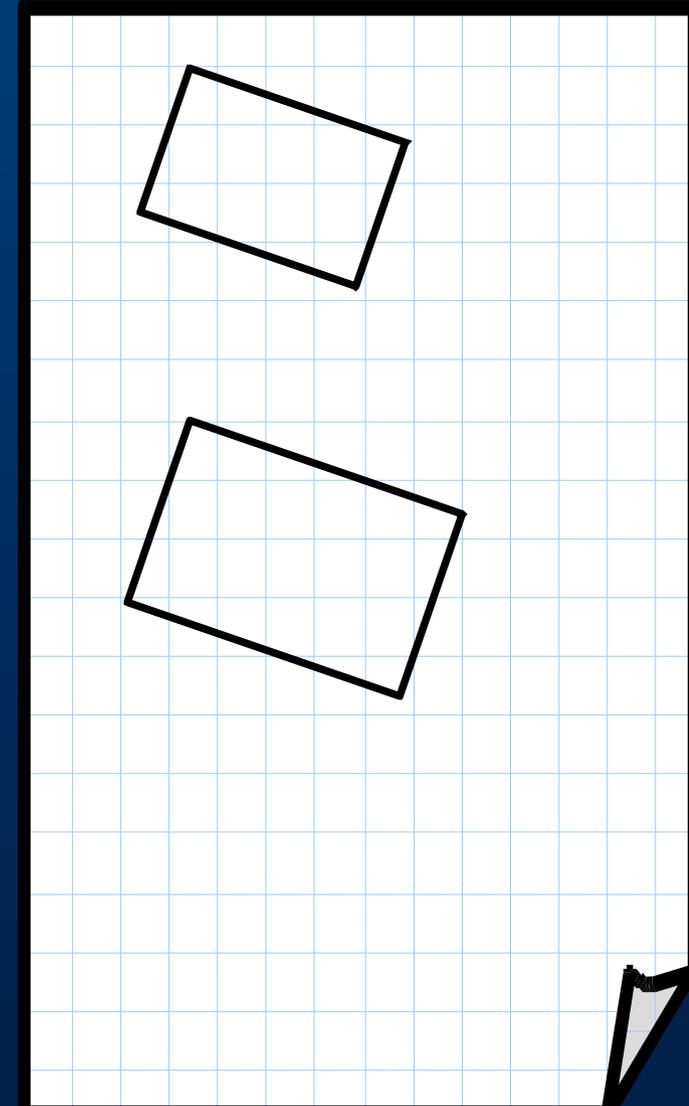
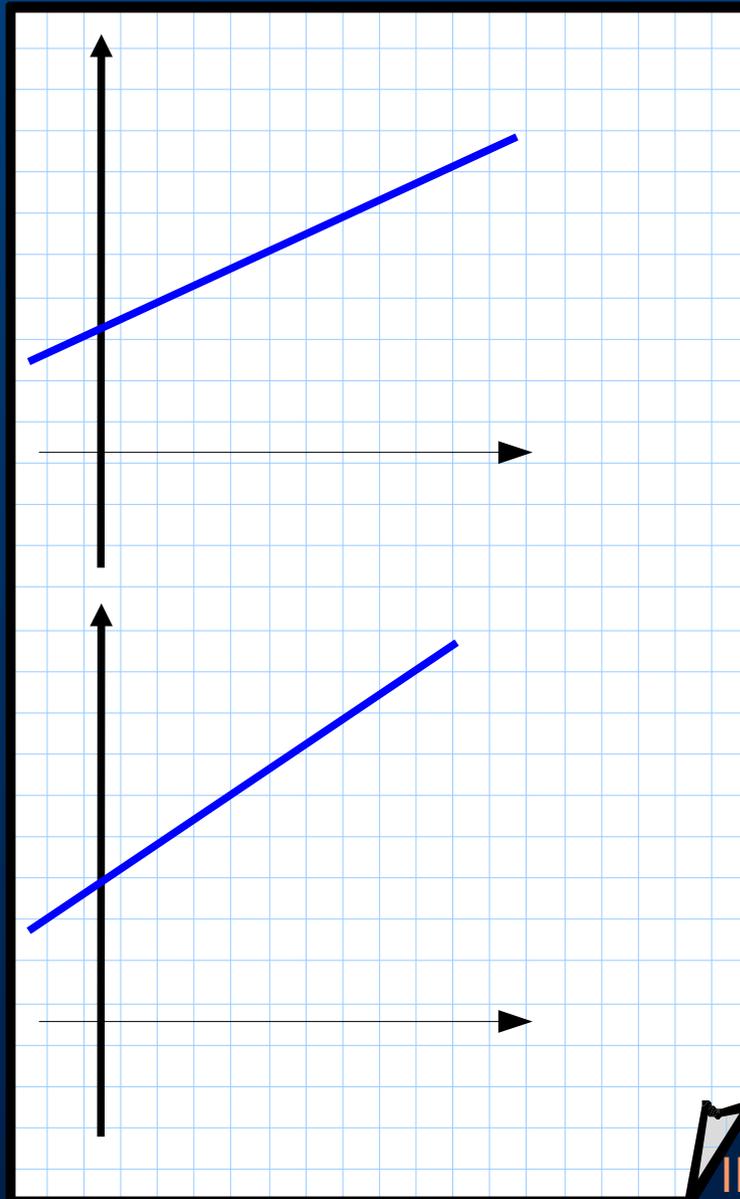
- Los registros digitales son caracterizados por el hecho de que los rasgos de los signos se oponen de manera discreta :
- « a^b » se opone a « ab »
- « a^b » no se opone à « a^b ».



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



En los registros analógicos los rasgos de los signos se diferencian de manera continua



Lenguajes y Registros

- Los lenguajes formales son registros digitales

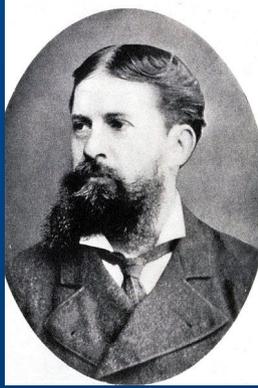
A Venn diagram consisting of two nested ovals. The outer oval is magenta and contains the text 'Registros de representación semiótica' at the bottom. The inner oval is red and contains the text 'registros Digitales' on the left and 'Lenguajes formales' in a white box on the right. The text 'registros Digitales' is partially overlapped by the white box.

registros
Digitales **Lenguajes formales**

Registros de representación semiótica

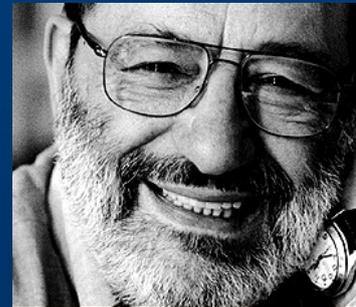


Lingüística y semiótica



C.S. Peirce

- Los lenguajes son sistemas de representación semiótica particulares.
- Todos los sistemas de representación semiótica pueden ser descriptos por la semiótica (ver por ej. Peirce, Eco, Duval...)
- Los lenguajes (y sólo ellos) pueden ser además descriptos por la lingüística (ver por ej. Saussure, Chomsky...)



Umberto Eco



F. de Saussure

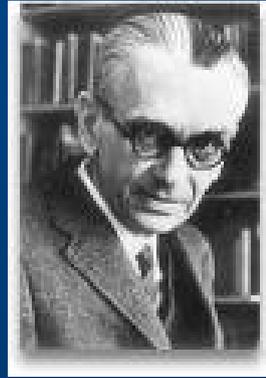


El concepto de lenguaje (1)

- Hay dos tipos de definición: funcionales y estructurales.
- Un ejemplo de definición funcional: la definición usada por R. Duval:
 - Un registro de representación semiótica es un lenguaje si permite:
 - Nombrar los objetos
 - Decir algo de los objetos
 - Encadenar enunciados en forma de discurso
 - Agregar a los enunciados un valor epistémico.



El concepto de lenguaje (2)



Kurt Gödel

- Un ejemplo de definición estructural: la definición usada por los lógicos:
 - Un lenguaje es un conjunto (infinito) de fórmulas bien formadas.



El concepto de lenguaje (3)

- El sistema de numeración ¿es un lenguaje?
- Las escrituras simbólicas del álgebra elemental ¿forman un lenguaje?
- Las frases del discurso de la geometría ¿forman un lenguaje?
- La matemática ¿es un lenguaje?

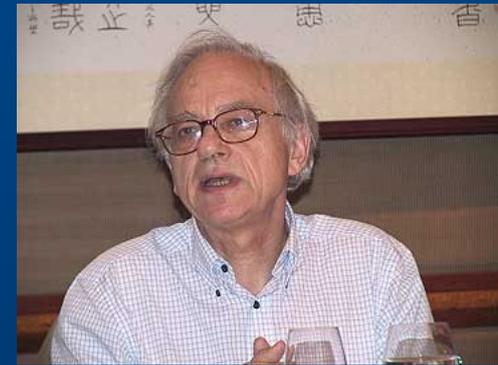


noesis y semiosis



- Semiosis
 - La aprehensión o la producción de una representación semiótica
- Noesis
 - Los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia





- Duval postula que:
 - la *noesis* es inseparable de la *semiosis*
 - la *semiosis* determina las condiciones de posibilidad de la *noesis*



noesis y semiosis (2)

- En matemática, las representaciones semióticas no sólo sirven a fines de comunicación, sino también para la transformación de la información y la objetivación (toma de conciencia)



noesis y semiosis (3)

- El aprendizaje de la matemática consiste en la producción de representaciones mentales como internalización de representaciones semióticas:
- conceptos, ideas, nociones, propiedades
- sistemas semióticos mismos (por ejemplo el sistema numérico)



Objetos matemáticos y representaciones

- Un objeto matemático es el invariante de todas sus representaciones
- La aprehensión conceptual de un objeto depende del acceso a la diversidad de sistemas semióticos para describirlo y a su articulación



Transformaciones Semióticas y aprendizaje

- La capacidad para realizar transformaciones semióticas es de diferente naturaleza según se trate de:
- el conocimiento de las reglas internas de un sistema que legitiman las transformaciones de tipo *tratamiento* (por ejemplo la reglas algebraicas que permiten la resolución de ecuaciones)
- la identificación de relaciones entre unidades significantes en un registro a fin de realizar una *conversión* a otro registro (por ejemplo la modelización algebraica de problemas o la representación gráfica de una ecuación).



Rol de las transformaciones semióticas en el razonamiento y el cálculo

- El enfoque semiótico de Duval enfatiza que la potencia de los signos no reside *solamente* en su capacidad de *evocar otra cosa*, sino en el poder ser *substituidos unos por otros* respetando ciertas reglas



Acerca del razonamiento y el cálculo

- En general consideramos el razonamiento y el cálculo como procesos de naturaleza muy diferente
- EL Diccionario de la Real Academia Española presenta como antónimos “calcular” “ y “razonar”



Rol de las transformaciones semióticas en el razonamiento y el cálculo.



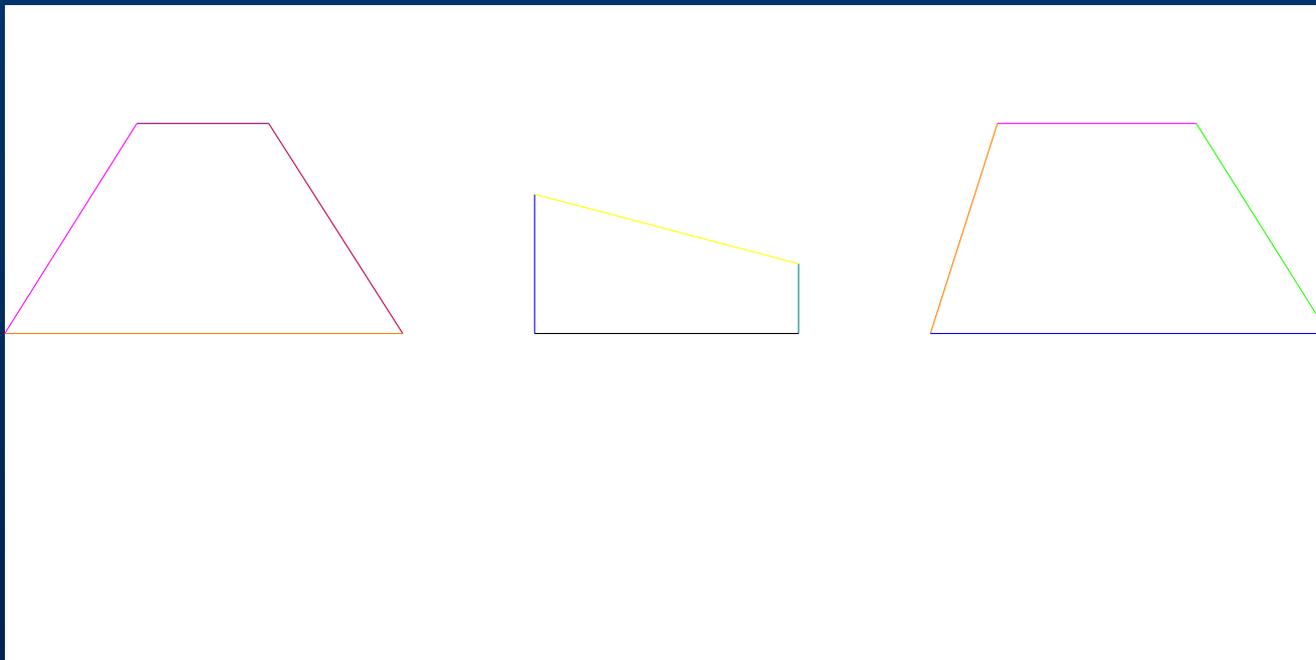
Étienne Bonnot de Condillac

- Condillac (1782), Frege (1891) y Duval (1995) avanzan y precisan la idea de que calcular y razonar provienen de un mismo proceso (el de substitución de signos unos por otros respetando ciertas reglas)



Un ejemplo de no articulación de representaciones:

- *sobre la base de analizar algunos ejemplos...*



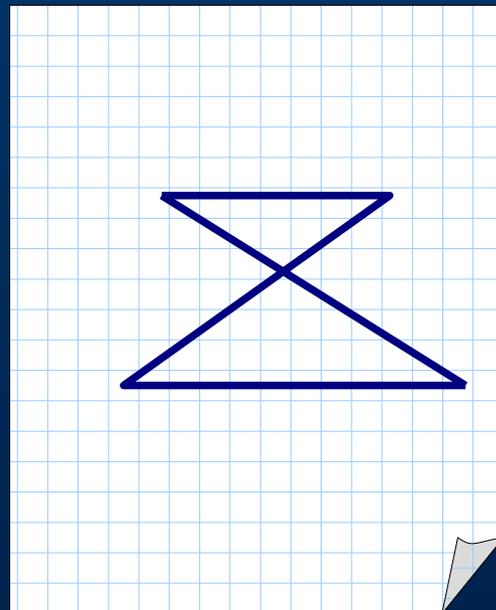
- una maestra (francesa, en formación) afirma:
 - « *Un trapezio es un cuadrilátero que tiene solamente dos lados paralelos* »
- (definición *típica*, Duval, 1995)



y agrega:

¿ ahora podrían fabricar otros ejemplos?

Un alumno dibuja lo siguiente.



- *La maestra dice:*
 - « *No, esto cumple la consigna pero no es un trapecio* »
- Análisis:
- la “definición” responde bien a las(s) figura(s) típica(s), pero permite dibujar otras figuras no típicas
- el criterio de aceptación del dibujo se hace en base a la figura típica y no a la definición formulada



- Dicho de otro modo:

Por un lado,

- La maestra **acepta** que el dibujo responde a la “definición” («cumple la consigna»)
- y a la vez
- lo **rechaza como trapecio** (« ... pero no es un trapecio»)



- Hay que notar que en este caso, si bien la formulación verbal de la definición es una *definición típica*, la misma da lugar a otros dibujos no prototípicos



Ejes y sugerencias para la didáctica

- **Un eje fundamental:** poner en primer plano la importancia de un trabajo didáctico destinado a la observación el reconocimiento y la descripción de objetos matemáticos tendientes a la familiarización con los mismos



- Se trata de favorecer una **adaptación** a diferentes instanciaciones particulares del objeto, en diferentes registros



Para ello, proponemos tener en cuenta :

- La naturaleza y cantidad de los casos a analizar y de los registros semióticos implicados.
- Representatividad de diferentes rasgos del objeto y no sólo de rasgos “típicos”
- Proveer de actividades específicas para las operaciones de observación, reconocimiento y descripción: formar una representación; transformarla en un mismo registro, convertirlo a otro registro



Referencias bibliográficas

- Bosch Casabò, M. (2003). “[Un punto de vista antropológico](#): la evolución de los "elementos de representación" en la actividad matemática”. En N. de los Angeles, C. Rodríguez, L. C. Contreras González, & J. Carrillo Yáñez (coord.): *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. ISBN 84-95699-43-5, pags. 15-28.
- Duval, R. (1993): Registres de représentation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, (pp. 37-65) (hay versión en castellano).
- Duval, R. (1995): *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Bern (hay versión en castellano).
- Ducrot, O., Todorov, T. (2003): Diccionario enciclopédico de las ciencias del Lenguaje, Siglo XXI Editores, Argentina.
- Frege G. (1974): Sobre sentido y significado, en *Escritos lógico-semánticos*, Editorial TECNOS, Madrid.



Referencias bibliográficas

- Panizza, M. & Drouhard, J-Ph. (2001). Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución, *actas Relme* 15, 207-212.
- Peirce, Charles S. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. 1-8, C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds). Cambridge, MA: Harvard University Press
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *RDM*, Vol. 10, n° 2-3, pp. 133-170. Trad. [Juan D. Godino](#).

