

II Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales *Actas*, II: 74-80, 2009. La Plata.

DEFICIENCIAS EN LA TRANSICION DE LA ARITMETICA AL ALGEBRA

MATA, L. E.; RAMÍREZ ARBALLO, M. G.; PORCEL, E. A; SIWERT, P.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura – Universidad Nacional del Nordeste. Avda. Libertad 5500, C.P. 3400, Corrientes. lilianaemata@hotmail.com

RESUMEN

En esta investigación se estudia el alcance de los conocimientos matemáticos de los alumnos que ingresan a la Universidad, partiendo del supuesto de su incidencia en el rendimiento académico y el desgranamiento. En este trabajo se analizan datos recabados mediante una prueba de diagnóstico tomada a ingresantes de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste. Se identifican y categorizan los errores frecuentes al operar con expresiones tanto numéricas como algebraicas. Se ha detectado que muchos estudiantes no han logrado realizar satisfactoriamente en el Nivel Medio la transición del lenguaje aritmético al algebraico. Se han identificado deficiencias en la aplicación de algoritmos y propiedades, por ejemplo, al hacer la abstracción de los procedimientos correspondientes a la suma de fracciones y el desarrollo del cuadrado de un binomio.

Palabras clave: errores – operaciones - números reales - expresiones algebraicas - ingresantes

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es conocer el alcance de los conocimientos de los estudiantes acerca de procedimientos algebraicos básicos y categorizar los errores frecuentes que cometen al operar con expresiones tanto numéricas como algebraicas al sumar fracciones, desarrollar el cuadrado de un binomio, aplicar propiedades de logaritmos y en el cálculo de potencia de exponente fraccionario.

Numerosos estudios muestran que el bajo rendimiento académico, la deserción y el desgranamiento que se produce en los primeros años de estudio universitario es motivo de preocupación de las instituciones educativas de Nivel Superior.

En 1996, la Comisión de Evaluación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA) de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE) mostró en cifras el problema del bajo rendimiento académico y el alto grado de desgranamiento de los alumnos de las distintas carreras que se cursan en esta Institución. A partir de los estudios realizados en el marco del Proyecto de Investigación “Análisis de factores que inciden en el rendimiento académico y desgranamiento de alumnos de la FACENA” se detectó que una de las causas vinculadas con esta problemática lo constituyen las deficiencias en los conocimientos de conceptos y procedimientos matemáticos. Se suma en este caso el hecho de que por tratarse de una Facultad de Ciencias Exactas, los planes de estudio de todas las carreras incluyen en primer año al menos un curso de Matemática.

El análisis global de la prueba de diagnóstico tomada a los alumnos ingresantes (Porcel *et al.*, 2001), puso en evidencia deficiencias en su formación matemática en general y, en particular, respecto de los conocimientos que traen del Nivel Secundario acerca de las operaciones en \mathbb{R} y sus propiedades. Lo cual movilizó los interrogantes acerca de las competencias y habilidades de los alumnos para operar con expresiones algebraicas o numéricas, que se transcriben a continuación y orientan el análisis que se desarrolla en este trabajo.

¿En qué medida los alumnos que ingresan a la Universidad son capaces de realizar, al operar con expresiones algebraicas, las abstracciones correspondientes de algoritmos y propiedades de las operaciones en \mathbb{R} ?

¿Cuáles son los errores frecuentes al operar con expresiones algebraicas al sumar fracciones, desarrollar el cuadrado de un binomio, aplicar propiedades de logaritmos y calcular de potencia de exponente fraccionario?

Como señalan Alonso *et al.* (1993), una de las principales funciones del Álgebra es la expresión y manipulación de lo general. Asimismo, mencionan que el lenguaje algebraico, depende del lenguaje simbólico, del uso correcto de paréntesis y de la aplicación de las propiedades de las operaciones. Las dificultades en su uso y tratamiento de las expresiones algebraicas se deben a la naturaleza abstracta de sus elementos; el alumno llega a un pensamiento formal cuando puede operar con elementos abstractos y realizar transformaciones algebraicas. Estos autores remarcan que en el Álgebra, es esencial la escritura correcta de las expresiones con símbolos, la trasgresión de reglas origina errores provenientes de la pérdida del contexto y conduce a la escritura de expresiones erróneas. Rabino *et al.* (2004) y Pochulu (2004) coinciden en que los errores de los estudiantes no son casuales, se basan en conocimientos y experiencias previas, y son motivados por diferentes causas didácticas, epistemológicas, cognitivas o actitudinales.

Por su parte, De la Torre (2005) expresa que los errores forman parte del proceso de construcción del conocimiento y podrían ser el motor de cambios en el aprendizaje del alumno y transformarse en un elemento constructivo e innovador del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En tanto que Pochulu (2004) realizó un análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresaron a la universidad, señalando que el estudio de los errores ha sido de permanente interés para diferentes investigadores y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy disímiles. El análisis y categorización de los errores se ha visto condicionado por las corrientes predominantes en Pedagogía y Psicología y por los objetivos y formas de organización del currículo en Matemática.

METODOLOGÍA

Se analizaron las respuestas dadas por alumnos ingresantes a los ítems del siguiente ejercicio sobre operaciones con expresiones algebraicas:

Nº	IGUALDAD	V/F	IGUALDAD CORRECTA
1	$\frac{3}{a} + \frac{a}{b} = \frac{3b+a^2}{ab}$		
2	$(2a^2 - 3)^2 = 4a^4 - 9$		
3	$\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$		
4	$\log \frac{a^n b}{c} = \frac{n \log a \cdot \log b}{\log c}$		

Tabla 1. Ejercicio sobre operaciones con expresiones algebraicas incluido en la prueba de diagnóstico tomada a ingresantes a FACENA.

En cada ítem propuesto, se registró el valor de verdad asignado y la expresión escrita por los alumnos como igualdad correcta, tratando de identificar los procedimientos para su posterior descripción.

Se detallan a continuación, contenidos conceptuales/procedimentales y nivel educativo en cuyo currículo se incluyen, sobre la base de lo establecido en el Diseño Curricular para el Tercer Ciclo de la Educación General Básica de la Provincia de Corrientes (Argentina) y en los Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal, área Matemática, de la Republica Argentina.

Además, cuando corresponde, se menciona el elemento distractor.

Ítem 1: Suma de expresiones algebraicas racionales.

La operación principal es la suma de fracciones.

Contenidos conceptuales/procedimentales: Uso de la jerarquía de las operaciones; algoritmo de la suma de fracciones.

Corresponden a contenidos de 7^{mo} año del Tercer Ciclo de la Educación General Básica (E.G.B.), Eje N°1: Número y cálculo. Se amplía su tratamiento con expresiones algebraicas a partir del 9° año de este ciclo, continuando el proceso de abstracción en el Nivel Polimodal.

Ítem 2: Cuadrado de un binomio.

La igualdad propuesta es una expresión algebraica.

Contenidos conceptuales/procedimentales: Cuadrado de un Binomio; Propiedad Distributiva de la Potenciación con respecto al Producto; Potencia de Potencia; Potencia de Exponente Par.

Corresponden a contenidos de 9^{no} año del Tercer Ciclo de la E.G.B. El proceso de abstracción utilizando expresiones algebraicas continúa en el Nivel Polimodal.

Distractor: El segundo miembro muestra a la potenciación como distributiva respecto de la resta.

Ítem 3: Potencia de exponente fraccionario

La igualdad propuesta es una expresión numérica.

Contenidos conceptuales/procedimentales: Potencia de Exponente Fraccionario; Raíz de Índice Par, Regla de Signos.

Corresponden a contenidos de 9^{no} año del Tercer Ciclo de la E.G.B. Se profundiza su estudio en el Nivel Polimodal.

Distractor: El único resultado de una raíz de índice par y radicando positivo, es el valor aritmético.

Ítem 4: Propiedades de logaritmos

La igualdad propuesta es una expresión algebraica

Contenidos conceptuales/procedimentales: Uso de la jerarquía de las operaciones; Propiedades de logaritmos: logaritmo del cociente, logaritmo del producto y de la potencia.

Corresponden a contenidos del Nivel Polimodal, Bloque de Álgebra y Geometría, en el cual entre los contenidos procedimentales se explicitan la resolución analítica y gráfica de ecuaciones, entre ellas las logarítmicas y exponenciales.

Distractor: El segundo miembro plantea el logaritmo como distributivo respecto del cociente y del producto y muestra correctamente aplicado el logaritmo de una potencia.

RESULTADOS

De los 810 alumnos evaluados, 59 (7,8%) no resolvieron ninguno de los ítems propuestos, 751 respondieron por lo menos un ítem y sobre ellos se centró el análisis.

En cuanto al valor de verdad de las igualdades propuestas, el ítem referido a propiedades de logaritmos registró el porcentaje más alto de no respuesta (43,1%) y el más bajo de respuesta correcta (17,8%). El mayor índice de respuesta correcta se registró en el primer punto, o sea en lo referido a suma de expresiones fraccionarias (64,6%).

Con respecto a la escritura de la igualdad correcta, registraron los más bajos porcentajes de respuesta los puntos referidos a propiedades de logaritmos (51,4%) y de potencia de exponente fraccionario (59,9%), mientras que en los restantes, los porcentajes de respuesta fueron superiores al 80%. En cuanto al cuadrado de un binomio se registró el mayor porcentaje de respuesta incorrecta (42,5%). Los ítems, propiedades de logaritmos y potencia de exponente fraccionario presentaron los mayores porcentajes de no respuesta (48,6% y 40,1% respectivamente), mientras que los ítems correspondientes a propiedades de logaritmos y cuadrado de un binomio, registraron el menor porcentaje de escritura de igualdad correcta (39,5% y 40,6%, respectivamente).

Procedimientos erróneos identificados.

Ítem 1: Suma de expresiones algebraicas racionales

Errores identificados: Producto de numeradores (26,6%); Suma de numeradores (20,2%); Suma del producto del denominador común por cada numerador (7,5%); El primer término es correcto y el segundo es igual al primer numerador (7,5%); Inversión del algoritmo (4,2%)

Se observó que el 12,3% de la población, no resolvió el ítem, el 62,3% escribió correctamente las respuestas a ambas cuestiones, y el 6,4% determinó como falso el valor de verdad y no completó la columna correspondiente a la igualdad correcta; finalmente el 19,0% formuló igualdades incorrectas, las que fueron objeto de análisis en este trabajo

De las supuestas “igualdades correctas” el 50% tenían el denominador común correcto e incorrecto el numerador; el resto de las expresiones analizadas correspondían a la categoría denominador incorrecto. Entre los denominadores incorrectos registramos expresiones como b , $a+b$; a ; a^2 ; $3b$; c ; sin denominador; 20 y 3 .

Ítem 2: Cuadrado de un Binomio.

El 42.5% escribió una expresión errónea.

Errores identificados: Distribución de la potencia respecto de la resta (52%). Luego de la distribución de la potencia respecto de la resta, se cometieron los siguientes errores: el exponente del binomio afecta sólo a uno de los factores del primer término, generalmente al coeficiente, o sólo a uno de sus términos; el cuadrado de un número es igual a su doble; resta de términos no semejantes (24%).

Luego de operar con términos no semejantes, cometieron los siguientes errores: elevar al cuadrado únicamente el coeficiente del monomio obtenido o sólo su parte literal; nuevamente considerar el cuadrado de un número igual a su doble; operan sólo con coeficientes ignorando la parte literal; resultado numérico (7%); binomio elevado a otra potencia (10%); trinomio con errores de signo (7%).

Ítem 3: Potencia de Exponente Fraccionario

Se han identificado los siguientes procedimientos erróneos: el resultado propuesto por los alumnos es el valor aritmético de la raíz (18,9%) o bien el valor negativo (6,76%); en ambos casos aplican la definición de potencia de exponente fraccionario; producto entre la base de la potencia y el exponente (21,62%) y en el 52,7% de los casos no se ha podido identificar los procedimientos.

Ítem 4: Propiedades de Logaritmos

El 39,5% de la población escribe una igualdad.

Se identificaron los siguientes procedimientos erróneos: propiedad distributiva de los logaritmos respecto del cociente; propiedad distributiva de los logaritmos respecto del producto; aplicación de logaritmos sólo al numerador; el logaritmo de una potencia lo expresan como el producto de la base por el logaritmo del exponente; y también aplican el logaritmo sólo a la base y a esta expresión la elevan al exponente dado.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos revelan que el conocimiento aritmético de la población en estudio es insuficiente y se traduce en dificultades para operar con expresiones algebraicas.

Se ha detectado en la población en estudio dificultades para:

- 1) Realizar transformaciones algebraicas aplicando propiedades de las operaciones en \mathbb{R} necesarias para escribir la igualdad correcta en cada ítem.
- 2) Utilizar correctamente el lenguaje algebraico.
- 3) Efectuar abstracciones y generalizaciones.

Se infiere que un alto porcentaje no ha alcanzado las expectativas de logro formuladas en los Contenidos Básicos Curriculares del Tercer Ciclo de la Educación General Básica (E.G.B.) y del Nivel Polimodal acerca de las operaciones de números reales y el uso correcto del lenguaje algebraico.

En las escrituras de las igualdades correctas por parte de los estudiantes se han detectado procedimientos identificables y otros que no ha sido posible identificar.

Los errores más frecuentes identificados son:

En cuanto a la suma de expresiones algebraicas fraccionarias, se han detectado expresiones que evidencian procedimientos inadecuados identificables, tales como operar la suma de fracciones sumando o multiplicando numeradores y denominadores entre sí, invertir el algoritmo multiplicando el denominador común por cada denominador y dividiendo por cada numerador, y otras que no han permitido identificar la lógica del procedimiento empleado.

Con respecto al desarrollo del cuadrado de un binomio, se observó la incorrecta distribución de la potencia respecto de la resta, como así también agrupar términos no semejantes, distribuir la potencia respecto del producto pero aplicar el exponente a sólo uno de los factores y, al operar con expresiones algebraicas, omitir considerar la parte literal de la expresión.

En cuanto a la potencia de exponente fraccionario, en la mayoría de los casos no se ha podido identificar el procedimiento siendo los errores más frecuentes escribir en forma excluyente el valor aritmético o la raíz negativa.

Acercas de las propiedades de logaritmos, son errores frecuentes distribuir el logaritmo respecto del producto y del cociente, invertir la propiedad del logaritmo de una potencia expresándolo como el producto de la base de la expresión por el logaritmo del exponente.

Coincidiendo con las observaciones realizadas por Alonso *et al.* (1993), los factores que explicarían estas dificultades en la resolución correcta de las expresiones propuestas podrían ser: escaso manejo de expresiones simbólicas; falta de conexión entre el lenguaje algebraico y el numérico; abuso en el uso de calculadoras; conocimiento insuficiente de la estructura aritmética que se traduce en una manipulación algebraica errónea.

Los errores detectados en las producciones escritas de los ingresantes coinciden con los señalados por Caronia de Joulia *et al.* (2006) quienes han observado: confusión tanto en la aplicación de las propiedades de las operaciones como en las reglas de signos; errores en la jerarquía de las operaciones; sustitución de las letras presentes en las expresiones algebraicas por números; dificultades en el reconocimiento y aplicación de los casos de factorización.

Desde la visión de Alonso *et al.* (1993), una de las causas de las dificultades sería que las expresiones algebraicas propuestas en los ítems analizados carecían de significado para estos alumnos universitarios y estaría indicando que no estarían debidamente preparados para realizar el tipo de generalización propuesta, ni para captar el significado de las expresiones algebraicas dadas, no teniendo conciencia de la validez de lo que respondían.

Los errores detectados son similares a los registrados por Pochulu (2004) quien expresa que “las equivocaciones cometidas por los alumnos tienen su origen en la falta de tiempo para la apropiación de los contenidos que se tratan en el Nivel Medio, en las estrategias de enseñanza utilizadas por los profesores, la falta de hábito en los alumnos de lectura comprensiva y en utilizar la estrategia de resolución de problemas”. A su vez, coincide con lo manifestado por Rabino *et al.* (2006; 38), de que “la introducción al método algebraico se hace con demasiada rapidez. El pasaje al nivel formal se realiza demasiado rápido y no deja tiempo a los estudiantes a desarrollar sus propios esquemas”.

Estos factores incidirían en el proceso enseñanza aprendizaje de contenidos matemáticos y podrían comprometer el rendimiento académico de los alumnos en los primeros años de sus estudios superiores. El tratamiento de los errores observados permitiría realizar una profunda reflexión acerca de las causas y las posibles estrategias de intervención didáctica en las asignaturas del primer año universitario.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso, F.; Barbero, C.; Fuentes, I.; Azcárate, A. G.; Dozagarat, J. M. G.; Gutiérrez, S.; Ortiz, M. A.; Rivière, V. y Da Veiga, C. (1993). *“Ideas y Actividades para enseñar Algebra”*. Madrid. Editorial Síntesis S.A.

Astolfi, J. P. (1999) *“El error, un medio para enseñar”*. Sevilla. Diada Editora.

Caronia de Joulia, S.; Zoppi, A. M.; Vizcaychipi de Polasek, M. del C.; Rivero, M.; Schwieters, H. (2006). Los conocimientos matemáticos en el umbral de la universidad. *Premisa* - Año 8 - N° 30, 13-23.

De la Torre, S., (2005) “*Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*” Buenos Aires. Editorial Magisterio del Río de La Plata.

Ministerio de Educación y Cultura. (1997) Diseño Curricular para el Tercer Ciclo de la Educación General Básica. Provincia de Corrientes. Argentina.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación (1997) Contenidos Básicos Comunes para la Educación Polimodal Matemática. Republica Argentina.

Pochulu, M.D. (2004). “Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la Universidad.” *OEI Revista Iberoamericana de Educación*. En línea http://www.rieoei.org/did_mat28.htm

Porcel, E.A.; Cáceres, R.E.; Caputo, L.N.; Mata, L.E.; Ramirez Arballo, M.G. y Sosa, M.del C. (2001) “Nivel de Conocimientos Matemáticos previos de alumnos ingresantes a FACENA en 2001” [en línea] <http://www.unne.edu.ar/Web/cyt/cyt/2001/cyt.htm>, Educación, 016.

Rabino, A.; Cuello, P. y de Munno, M. (2004). “Aprehender Algebra utilizando contextos significativos”. *Premisa*. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática, Año 6 N°22, 36-42.