HACIA UNA COMPLEMENTARIEDAD DEL ESPACIO DE TRABAJO IDÓNEO

VERDUGO, PAULA

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
paula.verdugo@mail.pucv.cl; paulasinttia@gmail.com

Resumen

En este trabajo se muestra el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) de referencia y el ETM Idóneo del docente relativo a la sucesión $a_n=(1+1/n)^n$, la cual es de nuestro interés por ser estudiada tanto en la enseñanza secundaria como en la enseñanza universitaria. Para nuestro estudio se considera una parte teórica de la matemática (ETM de Referencia) y otra parte en donde el profesor muestra como enseñaría la sucesión (ETM idóneo), el cual realiza cursos en los primeros años de universidad. A partir de dicho estudio se muestra un posible complemento entre el ETM de referencia y el ETM idóneo, así como también sus diferencias en el trabajo de una misma tarea.

Palabras claves: ETM, ETM de referencia, ETM idóneo, sucesión $a_n=(1+1/n)^n$.

INTRODUCCIÓN DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TRANSICIÓN SECUNDARIA-UNIVERSITARIA

En Chile, la transición entre la enseñanza secundaria a la universitaria no es un tema menor, debido a la elevada tasa de deserción que alcanza -alrededor de un 50% en los primeros años de universidad (Ministerio de Educación, 2012)-, lo que ha generado entre otras cosas altos costos al Estado, a las instituciones de educación superior, a los estudiantes y a sus familias. Para mitigar este problema, el Gobierno ha implementado fondos concursables como el *Mejoramiento a la Calidad de la Educación Superior* (MECESUP), entre otros, que buscan apoyar económicamente el progreso al conocimiento, con la finalidad de incrementar la equidad y la efectividad de su Sistema de Educación Terciaria. Asimismo, existen en algunas instituciones de educación superior proyectos internos que mitigan este problema apoyando a estudiantes y profesores con el uso de nuevas tecnologías y/o metodologías, como el Fondo de Innovación Académica (FIAC), que es un instrumento de adjudicación competitiva de recursos, que busca incentivar actividades de fomento a la calidad e innovación académica en instituciones elegibles del sistema de Educación Terciaria, con características de coherencia, capacidad de respuesta, equidad y calidad. Algunas universidades han aprovechado este tipo de financiamiento para disminuir sus tasas de reprobación, pero en general dichos proyectos están focalizados a la implementación de metodologías de enseñanza o de sistemas de evaluación.

En la literatura se pueden observar trabajos que tratan de alguna manera a la transición secundaria y universitaria como las siguientes: Fonseca (2004) aborda el tema de las discontinuidades matemáticas y didácticas. Gascón (1997) estudia los cambios en el contrato didáctico. En su tesis de doctorado, Bloch (2000) realiza un estudio sobre la enseñanza del análisis en la transición entre la escuela secundaria y la universidad (función y límite). Menares (2013) analiza el trabajo matemático de los profesores en su formación inicial en torno al estudio de las funciones continuas. En dicho trabajo se estudia fundamentalmente la desarticulación entre lo que el futuro profesor aprende en la universidad y lo que luego enseña como profesor en ejercicio. Drouhard (2007) realizó un estudio de la transición en donde se consideran nociones claves de conceptos y simbolismos matemáticos, los cuales son el centro de la preocupación de la epistemografía, que ha sido elegida porque estudia las organizaciones de los saberes y no la historia de los mismos como la epistemología.

En el marco de la tesis doctoral, nos hemos propuesto tratar la transición de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria en torno a las sucesiones. Sin embargo, en este escrito nos enfocaremos en cómo la sucesión $a_n=(1+1/n)^n$ es trabajada en el ETM de Referencia y en ETM idóneo.

Espacio de Trabajo Matemático

"Un espacio de trabajo matemático (ETM) es un espacio organizado para favorecer el funcionamiento del trabajo matemático (en un contexto educativo)". (Kuzniak, 2014)

"El trabajo matemático es el resultado de un proceso progresivo de génesis que permitirá una articulación interna con los niveles epistemológico y cognitivo, así como la articulación de estos dos niveles" (Kuzniak, 2011)

Para definir el ETM se introducen entonces dos planos, de acuerdo a la Figura 1. El plano epistemológico y el plano cognitivo estructuran el ETM apoyando la comprensión tanto del modelo del trabajo matemático que se genera en éste, como también la articulación entre sus planos. El plano epistemológico permite estructurar la organización matemática del ETM a través del dominio matemático en estudio, mientras que el plano cognitivo estructura el ETM desde el punto de vista de la puesta en práctica del individuo. En este sentido, la visualización, la construcción y la prueba juegan un rol clave. El plano epistemológico consiste en tres componentes características de la actividad matemática, las cuales están en interacción en un contexto determinado. Estas componentes son: “representamen”, “herramienta” (materiales o intelectuales) y un “referencial teórico” basado en definiciones y propiedades (Kuzniak, 2011). Estas componentes deben ser organizadas con un propósito determinado que depende estrechamente de la naturaleza matemática del dominio estudiado en su dimensión epistemológica.

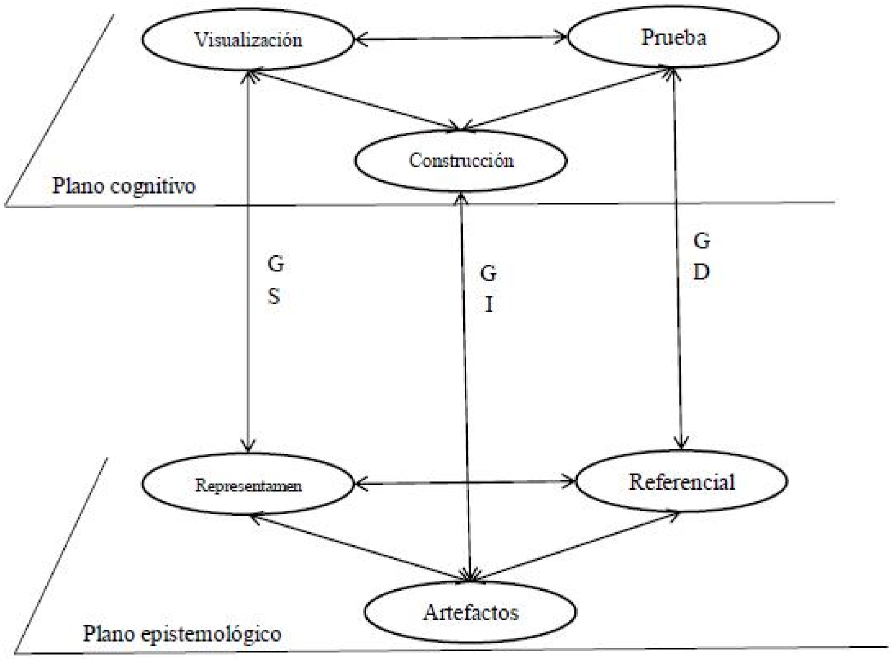


Figura 1: ETM y sus génesis (Kuzniak, 2011)

Además, el Espacio de Trabajo Matemático es profundizado en los siguientes tres ETM (Kuzniak, 2011), de las cuales consideraremos en este escrito:

- **ETM de Referencia.** La organización esperada de este espacio de trabajo es definido de manera ideal solamente sobre la base de criterios matemáticos.
- **TM Idóneo.** El ETM de referencia debe ser acondicionado y organizado para volverse un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución dada con una función definida”.
- **TM Personal.** El ETM idóneo debe ser utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. Cada uno se apropia y lo ocupa con sus conocimientos

> matemáticos y sus capacidades cognitivas. Este ETM es lo que llamamos un ETM personal."

Nos interesa focalizarnos en las sucesiones, ya que es un objeto matemático que ocupa un espacio importante dentro de la matemática, que se relaciona con otros objetos tales como límites y funciones, y tienen importantes aplicaciones tales como aproximaciones numéricas, modelos discretos (de dinámica de poblaciones, por ejemplo), entre otras. Estas aplicaciones caracterizan su ubicación tanto en algunos contenidos de enseñanza media, como en algunos cursos a nivel universitario a lo largo de los cursos de cálculo, y también en algunos cursos de algebra.

ALGUNOS ELEMENTOS METODOLÓGICOS

El trabajo que se presenta es de carácter cualitativo, en donde se muestra un caso (Stake, 1999) en relación a una sucesión en particular, la cual es escogida por presentarse tanto en educación secundaria como en educación universitaria. La metodología se apoya sobre una comparación entre el ETM de referencia y el ETM idóneo del docente, con el objetivo de identificar similitudes y diferencias entre ambos tipos de ETM, generando una complementariedad para un nuevo posible ETM idóneo.
Para realizar nuestra comparación (Verdugo, 2013), por un lado, nos apoyamos en el texto de Kuratowski (1962) para analizar el ETM de referencia, el cual ha sido seleccionado para ser nuestro referencial matemático, por ser un texto de introducción al cálculo, y por ser considerados como un texto de referencia por dos matemáticos encuestados.
Por otro lado, se aplica una encuesta a un docente universitario, solicitándole a éste que realice el estudio de la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ definida por $a_n=(1+1/n)^n$, tal como lo enseñaría. El docente ha sido seleccionado por trabajar en los cursos iniciales de universidad, por ser de formación profesor de matemáticas y por poseer un magister en un área afín a la didáctica de la matemática.

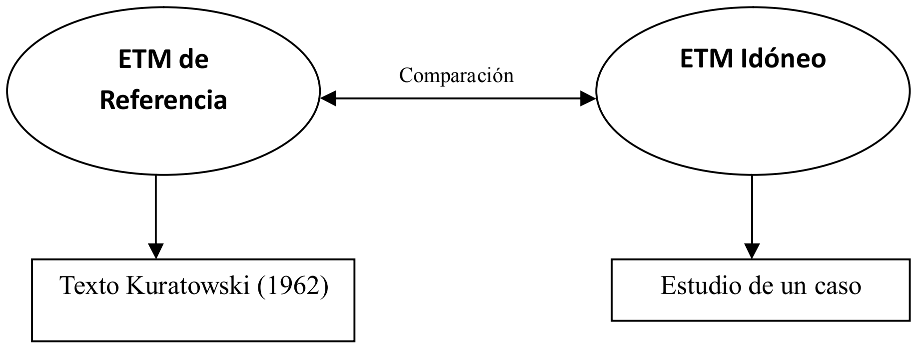


Figura 2: Comparación entre el ETM de Referencia y ETM Idóneo

ETM de Referencia

Basándonos en el libro de Kuratowski, analizaremos las circulaciones, que definiremos como el paso de una componente a otra de los planos epistemológico y cognitivo del ETM, que posee la sucesión $(a_n)_{n\in N}$ definida por $a_n=(1+1/n)^n$, para cada $n\in N$, demostrando que es monótona y acotada, y por lo tanto convergente. La demostración es la siguiente, traducida y transcrita del texto Kuratoswki, con leves modificaciones para una mejor compresión. Primero se utiliza el Teorema del Binomio de Newton para desarrollar a_n y escribiendo convenientemente algunos términos.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{n!\,n^n}$$

$$2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

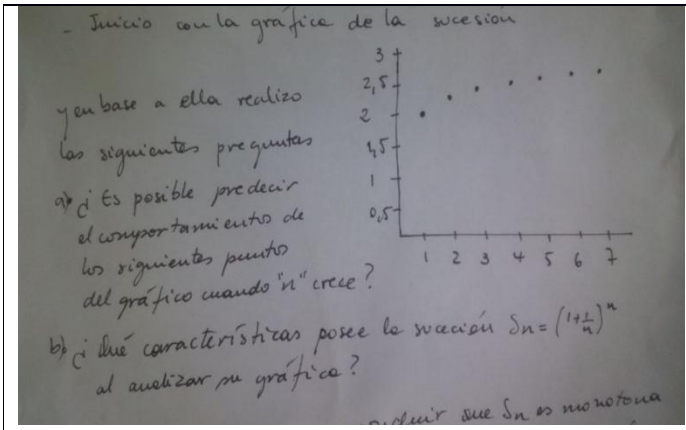
convergente. La génesis discursiva permite activar la operacionalización, permitiendo articular el referencial con la prueba. En el caso de las sucesiones esta génesis puede ser representada por diversas técnicas de demostración; siguiendo con el ejemplo de la sucesión $(1+1/n)^n$, se podría decir que la génesis propulsora es el teorema del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum^{n} \binom{n}{\ }(a)^{n-k}(b)^k = \binom{n}{\ } + \binom{n}{\ }ab + \binom{n}{\ }a^2b^2 + \cdots \binom{n}{\ }$$

considerada; por otra parte, estar "bien construido", en el sentido en que sus diferentes componentes están organizados con criterios de validez" (Kuzniak, Richard, 2014)

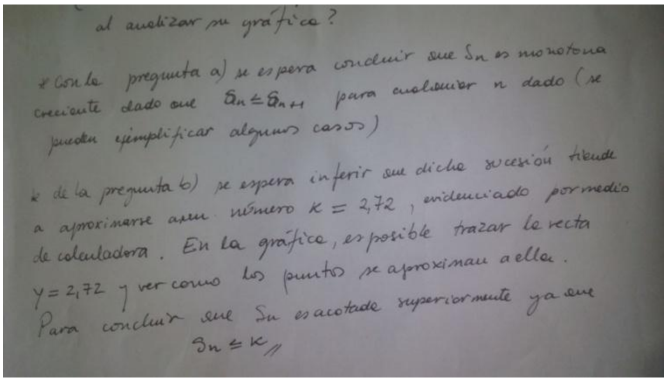
En esta instancia se analizará un recorrido en el espacio de trabajo matemático, desde el punto de vista del idóneo, para lo cual se ha escogido a un profesor de formación inicial pedagogo en matemática, y que realiza clases en los primeros años de universidad, con el propósito de indagar en su trabajo matemático.

Para ello le solicitamos a dicho profesor analizar la sucesión $a_n=(1+1/n)^n$ estudiando si es monótona y acotada (y por lo tanto convergente), tal como lo enseñaría en un curso de cálculo. A continuación mostraremos la producción del docente:



Transcripción :
Inicio con la gráfica de la sucesión y en base a ella realizo las siguientes preguntas:
a) ¿Es posible predecir el comportamiento de los siguientes puntos del gráfico cuando "n" crece?
b) ¿Qué características posee la sucesión $s_n=(1+1/n)^n$ al analizar su gráfica?

Figura 4: Respuesta de un docente



Transcripción de la Imagen:
* Con la pregunta *a*) se espera concluir que S_n es monótona creciente dado que $s_n \leq s_{n+1}$ para cualquier n dado (se puede ejemplificar algunos casos)
* De la pregunta *b*) se espera inferir que dicha sucesión tiende a aproximarse a un número k=2,72, evidenciado por medio de calculadora. En la gráfica, es posible trazar la recta y=2,72, y ver como los puntos se aproximan a ella.
Para concluir que s_n es acotada superiormente ya que $s_n \leq k$.

Figura 5: Respuesta de un docente

Podemos observar que este docente se basa en el *representamen*, confeccionando un gráfico para hacer que sus alumnos visualicen que la sucesión es monótona creciente y acotada, dando así una posible argumentación retórica en el sentido de Duval (2005), tratando de convencer a los estudiantes, pero sin recurrir a una prueba basada en el ETM de referencia.
A continuación se muestra una circulación en el ETM observando el trabajo realizado por este docente:

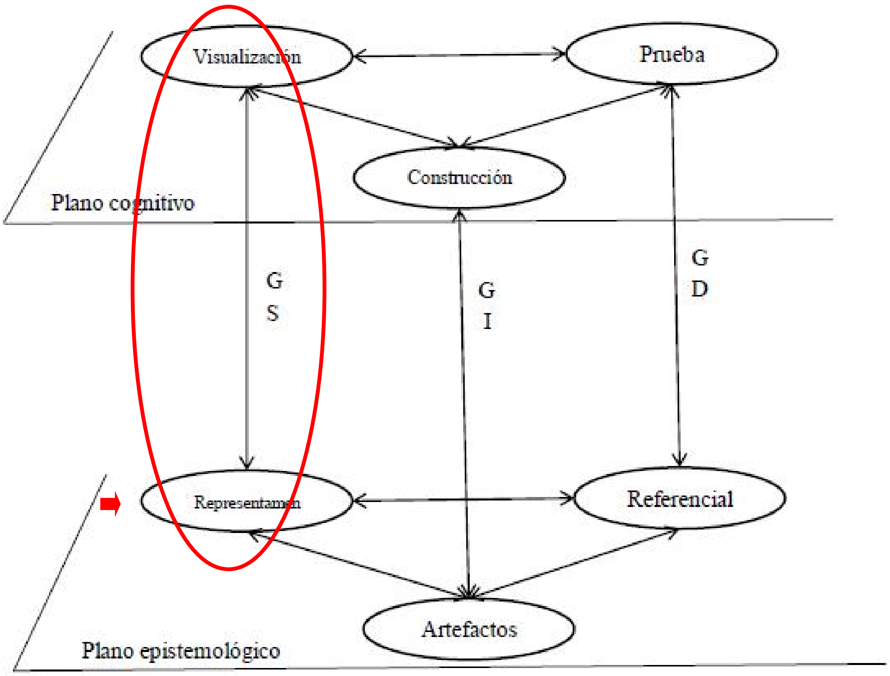


Figura 6: Esquema ETM idóneo

CONCLUSIONES

La sucesión $a_n=(1+1/n)^n$ resulta ser novedosa para el desarrollo del ETM ya que proporciona un ejemplo original de referencia en el marco teórico, el cual a su vez es contrastado con el idóneo. Asimismo, el análisis del ETM idóneo nos permite observar un recorrido distinto al ETM de referencia, entre los planos epistemológicos y cognitivos. Destacando que el texto Kuratowski presenta una entrada al ETM por el polo referencial, opuesta a la producción del docente, el cual podría considerarse que comienza en el polo del representamen, evidenciando una gran diferencia entre la rigurosidad del texto y las actividades propuestas por el profesor encuestado.
Las informaciones obtenidas del ETM de referencia y ETM idóneo son interesantes ya que ellas pueden ser de utilidad para complementar y/o reformular el ETM idóneo; es decir, se podría considerar una introducción de la sucesión mediante un representamen, incorporando el gráfico propuesto por el docente, para hacer que sus estudiantes visualicen que la sucesión es monótona creciente y acotada, incorporando inicialmente un tipo de prueba argumentativa, para luego complementar con la rigurosidad que sugiere el texto Kuratowski, destacando la importancia de contar con la génesis propulsora teorema del binomio de Newton.

La rigurosidad a la que nos referimos radica, por ejemplo, en que el texto considera una prueba, para $a_n<a_{n+1}$, concluyendo que la sucesión es creciente mediante el teorema Binomio de Newton, en cambio el profesor encuestado, con el mismo propósito, propone la siguiente pregunta *¿Es posible predecir el comportamiento de los siguientes puntos del gráfico* (mediante una figura) *cuando "n" crece?,* esperando concluir que S_n es monótona creciente dado que $s_n \leq s_{n+1}$, lo cual consideramos más bien una prueba intuitiva. Nuestra propuesta pretende complementar ambos enfoques para re formular un ETM idóneo.
Considerar la complementariedad del ETM de referencia y el ETM idóneo, tanto de docentes universitarios como docentes de secundaria, es fundamental incluso para una transición más suave entre la secundaria y la universidad. Y desde esta complementariedad, proponer actividades que consideren en lo posible todos los polos del ETM para intentar así proporcionar a los estudiantes una mejor visibilidad de las tareas, abarcando incluso diferentes formas de abordar una tarea por parte de los estudiantes.

Agradecimientos
Beca de estudio de Doctorado año 2014 PUCV**;** Beca de Doctorado año 2015 Conicyt (21151243)**;** Beca Complementaria año 2015 Conicyt (R.E.: 5359/2015)**;** Proyecto ECOS-Conicyt C13H03.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*. Thèse Université Bordeaux I. Recuperado el 12 de junio de 2014 de: Institut Français de L'éducation, http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/60/35/PDF/Bloch_these_total.pdf

Constantin, C. (2014*). Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège?* Thèse doctorale, université Aix-Marseille.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg,* 10, 5-53.

Drouhard, J-Ph. (2007). Prolégomènes épistémographiques à l'étude des transitions dans l'enseignement des mathématiques. In N. Bednarz & Cl. Mary (Eds.) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés*. CD. Sherbrooke, QC: Éditions du CRP. pp. T6EMF104-T6EMF104. Disponible en : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/66/02/PDF/Drouhard_pour_actes_EMF2006.pdf
Consultado el: 12/06/2014

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza Universitaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Vigo, Departamento de Matemática Aplicada I, trabajo realizado en el marco del proyecto BS02000-0049 de la DGIYT (MCT). Disponible en:

http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/07/TESIS__en__PDF.pdf
Consultado el: 12/06/2014

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemática en secundaria a estudiar matemática en la universidad. *Suma,* 26, 11-21. Disponible en: http://revistasuma.es/IMG/pdf/26/011-021.pdf Consultado el: 12/06/2014

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.

Kuratowski, K. (1962). *Introduction to calculus*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company Inc. Reading.

Kuzniak, A. & Richard, Ph. (2014). Espacio de Trabajo Matemático. Puntos de vistas y Perspectivas. *Relime,* 17,4-I.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 16, 9–24.

Menares, R & Montoya, E. (2013) (Por aparecer). *El trabajo matemático de profesores en su formación inicial: un estudio en torno a las funciones continuas*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Ministerio de Educación (2012). Deserción en la Educación Superior en Chile. Santiago, Chile. Disponible en:
http://www.mineduc.cl/usuarios/bmineduc/doc/201209281737360.EVIDENCIASCEM9.pdf Consultado el : 12/06/2014

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Verdugo, P. (2013), *Enseignement et apprentissage de l'algèbre élémentaire en France et au Chili.* Mémoire de Master 2, Université de Bordeaux II et Bordeaux IV.