

¿Y SI ENSEÑAMOS A DIBUJAR?

GROSSI, SABRINA ^(1,3) ; SGRECCIA, NATALIA ^(1,2,4)

¹ Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario.

² Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

³ catugym@hotmail.com, ⁴ nataliasgreccia@hotmail.com

RESUMEN

Trabajos previos nos han indicado que en las clases de Matemática de la escuela secundaria raramente se enseña a dibujar y, menos aún, cuerpos geométricos en un papel. Por otro lado, investigaciones relativas a capacidad espacial revelan lo relevante de desarrollar la habilidad de dibujo e interpretación de cuerpos y figuras como eslabón entre las competencias manipulativas y las lógicas. En esta oportunidad presentamos una propuesta didáctica que consideramos factible para promover el desarrollo de la habilidad de dibujo y construcción desde los primeros años de escolaridad secundaria.

Palabras clave: representación gráfica, cuerpos geométricos, escuela secundaria.

INTRODUCCIÓN DEL PROBLEMA

Este trabajo forma parte del Proyecto de Investigación ING445 “Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática” (UNR, Res. 886/2014) y se ubica entre dos Becas de Investigación: “Los cuerpos geométricos en los libros de texto del Ciclo Básico de Secundaria: modos de representación de lo 3d en un soporte 2d” (UNR, Res. 2386/2013) y “Las habilidades de representación y comunicación de información 3d: un estudio en la formación de Profesores en Matemática e Ingenieros” (FCEIA, Res. 1679/2014).

En dicho marco, al momento se han analizado las unidades correspondientes al tratamiento de cuerpos geométricos y sus medidas de tres propuestas editoriales correspondientes al ciclo básico de escuela secundaria (Grossi y Sgreccia, 2014, 2015), de acuerdo a las categorías de análisis que se muestran en la Tabla 1.

Categorías	Sub-categorías
Portador de texto	Ordenamiento general
	Capítulo “Cuerpos” en la obra
Capítulo “Cuerpos” en sí mismo	Ordenamiento general
	Secciones del capítulo
Habilidades geométricas que promueve (Höffer, 1981)	Visuales
	De razonamiento
	De dibujo y construcción
	De comunicación
	De aplicación y transferencia
Representación 2d de cuerpos 3d	Tipos de representación
	Sistemas de representación
	Distractores

Tabla 1: Categorías de análisis empleadas en estudios previos

Los hallazgos nos han indicado una escasa diversidad de sistemas de representación presentes (predomina fuertemente la perspectiva por sobre el desarrollo plano o la representación normalizada y, dentro de perspectiva, la isométrica y caballera, por sobre la dimétrica, trimétrica y militar) así como una aparición considerable de distractores, tanto de orientación (cuerpos apoyados sobre la base, cuerpos rectos) como de estructuración (cuerpos con altura mayor que el ancho de la base, cuerpos convexos, cuerpos con base regular).

Acordamos con Gutiérrez (1998) en que una representación plana “perfecta” (aquella que transmite al observador la misma cantidad de información que el cuerpo tridimensional real al que representa) es imposible. De todos modos, y por esto mismo, consideramos necesario que los estudiantes sean capaces de manejar varias formas de representación, para seleccionar la más adecuada en cada caso que se les presente, para ampliar la visión de los

cuerpos geométricos y de contenidos vinculados; en fin, para robustecer sus herramientas matemáticas desde una puerta de entrada posiblemente “no convencional”: dibujando.

Asimismo, como plantean Barrantes *et al.* (2015), la Geometría tiene gran relación y aplicación sobre el mundo que nos rodea, permitiéndonos a través de su estudio desarrollar el razonamiento lógico, la percepción espacial y la visualización. Por ello, se considera absurdo un proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría ajeno a la utilización de representaciones gráficas.

En cuanto a los trayectos de formación en el nivel superior, en lo relativo al dibujo, son las carreras de Ingenierías o Arquitectura las que suelen impartir cursos, dados a su vez por ingenieros o arquitectos, para formar en este aspecto. Raramente encontremos esos perfiles en los Profesorados, y en particular de Matemática. Motivadas por el establecimiento de algún nexo entre esas partes, en pos de favorecer la formación de profesores en Matemática que enseñarán Geometría en la escuela secundaria, durante el primer semestre del año 2015 una de las autoras cursó la asignatura Representación Gráfica de la carrera Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (FCEIA).

Consideramos que la habilidad de dibujo es fundamental para desarrollar conocimientos geométrico-espaciales, actuando como eslabón entre las habilidades visuales y de razonamiento (Brooks, 2009). La experiencia docente, complementada con indagaciones previas en egresados y estudiantes avanzados del PM (Sgreccia, 2012), nos ha advertido que debe fortalecerse este eslabón, pues la importancia de la Geometría tridimensional suele estar asociada a acciones más bien sensoriales (ver, tocar) que cognitivas (modelizar, deducir, operar).

En particular aquí nos interesamos en la representación plana (2d) de objetos tridimensionales (3d), nos preguntamos cómo se puede favorecer su enseñanza en la escuela secundaria (es decir, no solo en cursos superiores especialmente destinados a ello) y ensayamos una propuesta didáctica.

ALGUNAS NOCIONES BÁSICAS

En términos generales, la *capacidad espacial* es un elemento importante en muchas actividades de la vida, no solo las que están asociadas a la enseñanza de la Geometría (Arrieta y Medrano, 2015). Esto ha hecho que se estudie desde diferentes áreas y que, como consecuencia, exista una gran variedad de definiciones y conceptos ligados a la misma. Para Arrieta (2006), la capacidad espacial es la capacidad para formar, reconocer y manipular imágenes, figuras y objetos mentalmente.

Es así que desde sus orígenes el ser humano ha tratado de comunicarse a través de diferentes formas de expresión: gestual, oral, escrita y también gráfica. Por ello, el *dibujo* se considera una forma de comunicación, un lenguaje. En Geometría, la comunicación gráfica es una herramienta sumamente útil en la representación de situaciones-problema. En particular, la Geometría Descriptiva permite representar objetos tridimensionales sobre una superficie bidimensional, estableciendo propiedades entre las formas del espacio y las formas planas. En este sentido, es importante que los sistemas de representación (conjunto de operaciones que permiten obtener las proyecciones de un objeto del espacio sobre un plano) que se empleen sean variados y reversibles; esto es: dada una figura en el espacio,

pueden siempre obtenerse sus proyecciones sobre un plano y dadas las proyecciones de la figura, puede determinarse la posición en el espacio de cualquier punto de la figura. Puntualmente, a partir de la clasificación de Barrantes *et al.* (2015), distinguiremos los sistemas de representación a partir de las diferentes perspectivas de los Sistemas Axonómétricos, que estudian sistemas de representación de figuras espaciales en un plano por medio de proyecciones obtenidas según tres ejes. Estos a su vez están contenidos en tres planos que conforman el denominado triedro trirectángulo, determinando un plano oblicuo triangular llamado “triángulo de las trazas” (posicionado paralelamente al plano en que se dibuja). Con ello, se define la perspectiva como el arte de representar objetos en forma y disposición parecida a la vista humana. En la Tabla 2 se muestra una clasificación de sistemas axonómétricos según los ángulos entre los ejes.





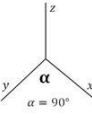
AXONOMETRÍAS	ORTOGONAL Las rectas proyectantes auxiliares son perpendiculares al plano de proyección. Ningún elemento de la figura es paralelo al plano de proyección	PERSPECTIVA ISOMÉTRICA Tres ángulos iguales 
		PERSPECTIVA DIMÉTRICA Dos ángulos iguales y uno distinto 
		PERSPECTIVA TRIMÉTRICA Tres ángulos diferentes 
	OBLICUA Las rectas proyectantes auxiliares son oblicuas al plano de proyección. Tres ejes ortogonales - todos visibles-, con dos paralelos al plano de proyección	CABALLERA Los ejes que expresan las magnitudes de altura y anchura conservan sus dimensiones reales. El perpendicular expresa la profundidad 
		MILITAR Se le da preferencia a una cara, la horizontal y en verdadera magnitud, las demás aparecen deformadas 

Tabla 2: Clasificación de axonometrías

Barrantes *et al.* (2015) también nos advierten acerca de la presencia de representaciones geométricas estereotipadas en la mayoría de las propuestas de enseñanza de los textos escolares. Las connotan como estereotipadas porque repiten patrones o presentan elementos que inducen a la atribución de propiedades inexistentes así como a la formación de conceptos erróneos sobre lo que se está representando. Esto, inexorablemente, conlleva a interpretaciones sesgadas de figuras tridimensionales por parte de los alumnos. A dichas representaciones estereotipadas las denominan *distractores*, clasificándolos de dos maneras: de orientación y de estructuración. Los primeros se asocian a propiedades visuales del esquema conceptual del alumno que no tienen nada que ver con la definición del concepto (por ejemplo: suelen representarse los cuerpos solo apoyados sobre el plano horizontal) mientras que los segundos aluden a representaciones de un concepto en el que ciertas propiedades y elementos son excluidos, en principio sin intencionalidad (por ejemplo: suelen presentarse las definiciones de poliedros solo para cuerpos convexos).

MÉTODO EMPLEADO

El trabajo de campo de los estudios de ambas becas de investigación se ha venido realizando en la FCEIA. Específicamente el primero de ellos en la Biblioteca Central “Ing. Luis Laporte” y el segundo, en el marco de una propuesta interdisciplinaria, transitando los espacios -Escuelas, Departamentos, Carreras y Asignaturas- que se muestran en la Figura 1.

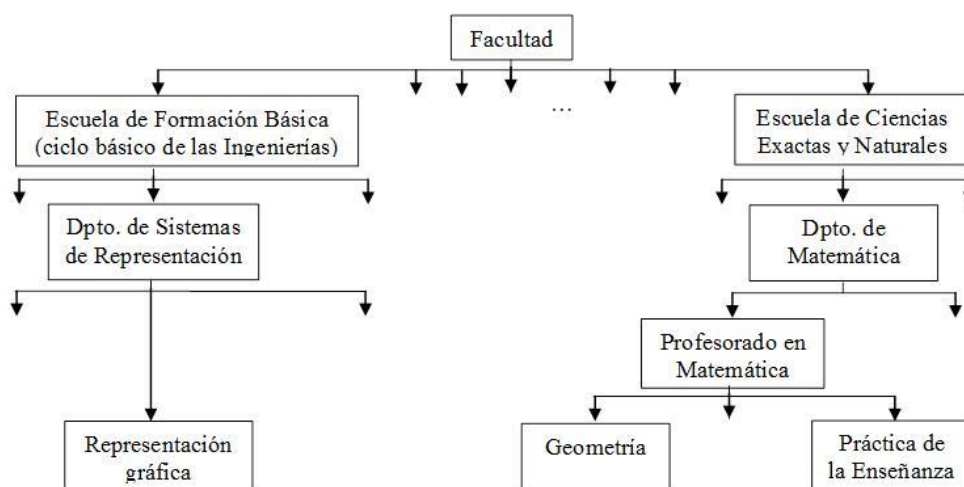


Figura 1. Espacios de la Facultad involucrados en la investigación

A nivel global, el estudio se ha caracterizado por ser cualitativo, descriptivo, no experimental, empírico y transversal (Hernández *et al.*, 2006). A partir de haber aplicado las técnicas de análisis de contenido para estudiar los libros de texto (primera instancia) y de observaciones de clases sobre representación gráfica en el nivel superior (segunda instancia), se decidió en esta ocasión esbozar una propuesta de enseñanza sobre el tema factible de ser desarrollada en los primeros años de escolaridad secundaria.

UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

La idea de la propuesta es resignificar aquellas situaciones en donde se hace posible y necesaria la acción de dibujar. En momentos de clase, en los cuales se trabaja en torno a cuerpos geométricos, se propone reafirmar una mirada crítica sobre la acción de representar y de interpretar representaciones de cuerpos.

Objetivo general: Valorar y fortalecer la habilidad de dibujo en el trabajo geométrico en secundaria.

Objetivos específicos:

- Reconocer la importancia de la habilidad de dibujo para el conocimiento geométrico en particular y matemático en general.
- Mejorar el desarrollo de la capacidad espacial a través de la representación bidimensional de objetos tridimensionales.

- Interpretar de manera crítica las representaciones de cuerpos.

Sobre la acción del docente

- Reconoce falencias (en caso de haberlas) en los estudiantes a la hora de representar cuerpos.
- Muestra a los alumnos técnicas elementales para realizar representaciones de cuerpos geométricos de manera básica (sin una rigurosidad específica de sistemas de representación).
- Plantea actividades vinculadas al estudio geométrico sin omitir la actividad de representación.

Sobre el libro de texto para el estudio de la Geometría tridimensional

Si bien los docentes pueden elegir entre numerosas editoriales y ediciones de libros de texto de secundaria para trabajar un determinado tema, muchos factores influyen en la elección del mismo y en ocasiones se debe necesariamente trabajar con alguno en particular. En cuanto a esto, es útil tener en cuenta qué factores “mirar” en el desarrollo del tema de interés, pudiendo así rebatir aquellos aspectos insuficientes y aprovechar los que aportan fuertemente al aprendizaje de los estudiantes.

Para el caso del estudio de la Geometría 3d en el nivel secundario, nos interesa distinguir la presencia de distractores. En primer lugar, si existe un fuerte predominio de distractores de orientación. En este aspecto, si la mayoría de los cuerpos presentes en el diseño están apoyados sobre la base o son de tipo rectos. Luego, distinguir si se presentan distractores de estructuración, es decir, si hay una marcada presencia de cuerpos con altura mayor que el ancho de la base o convexos o con bases regulares. Es en este marco que denominaremos estereotipadas a aquellas representaciones que posean algún distractor. Frente a la presencia de imágenes estereotipadas y de imágenes que se muestren a partir de una única vista (es decir, un único tipo de representación) podemos complementar la clase de Geometría incorporando nuevas representaciones. Para ello proponemos dos alternativas: utilizando la pizarra o pizarrón; o utilizando softwares geométricos.

La Figura 2 muestra en la parte (a) la imagen con la que se representa un cilindro en el capítulo “cuerpos” de un libro determinado. Este cilindro es el encargado de presentar e identificar a este tipo de cuerpo en una sección teórica de dicho capítulo. La parte (b) muestra una imagen complementaria que podría realizarse en el pizarrón de clase. Como puede verse, se muestran otros cuerpos, también cilindros, pero desde diferentes vistas y rompiendo con algún estereotipo presente en el original (como por ejemplo el distractor “cuerpos apoyados sobre la base” o “altura mayor que el ancho de la base”). La parte (c) expone la representación del cilindro a través de un software geométrico (en este caso se utilizó GeoGebra). Aquí se procuró rotar el objeto para comparar sus vistas y cambiar la altura del cuerpo e incluso el diámetro de la base.

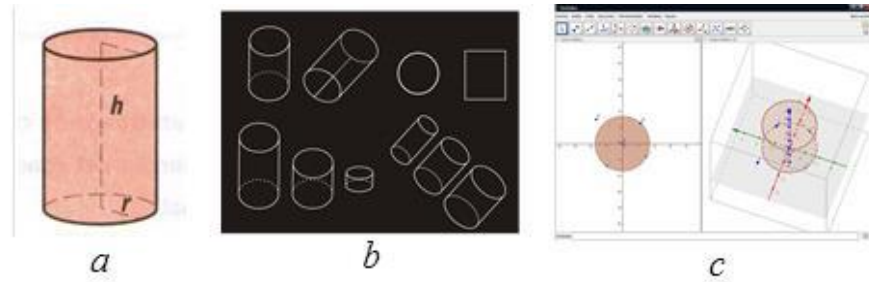


Figura 2. Complemento para imágenes estereotipadas: a) Imagen del libro de texto; b) Dibujo en pizarrón por el docente; c) Representación a través de software

Sobre las actividades que se pueden proponer

1. En una actividad destinada a trabajar con contenidos específicos sobre cuerpos geométricos (como puede ser: noción de cuerpo como objeto geométrico y sus características, cálculo de medidas, vínculo de cuerpos geométricos con objetos de la cotidianidad) se presta especial atención a la representación geométrica de los cuerpos (o composición / truncamiento de cuerpos) implicados en el ejercicio. Se hacen ver diferentes representaciones planas posibles del mismo cuerpo, marcándose semejanzas y diferencias, y señalando las bondades de cada una para la resolución de la actividad.
2. Se da la representación normalizada (distintas vistas de un cuerpo) de algunos cuerpos “no poliedros estándar” (Figura 3) y se solicita a los alumnos que identifiquen el cuerpo en cuestión. Pueden realizarse *multiple choice*, caracterización con palabras o proponer la construcción con cartón.

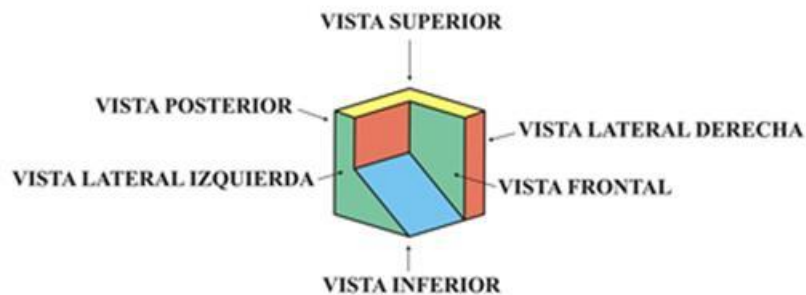


Figura 3. Distintas vistas de un poliedro no estándar

3. A partir del desarrollo plano de ciertos cuerpos (en principio cuerpos geométricos simples y luego cuerpos compuestos y truncados) se pide a los estudiantes que representen el cuerpo en perspectiva (Figura 4).

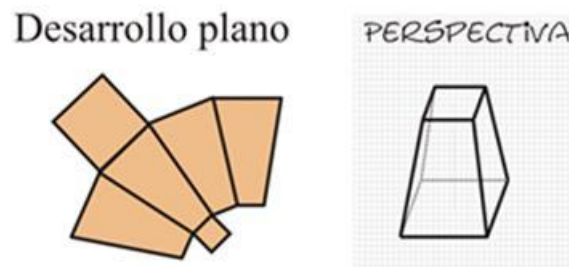


Figura 4. Dos modos de representar una pirámide truncada

4. Se solicita dibujar un determinado cuerpo, para luego ser analizando oralmente y en grupo: cuáles son caras visibles y no visibles, qué sucede con las aristas (si se dibujan o no las aristas ocultas), qué elemento representa el ancho, largo o alto, en dónde está situada la visión del observador, etc. Se pretende aquí que los alumnos reconozcan los elementos del cuerpo al que están representando ubicándolo visualmente en el espacio y pudiendo percibir ambigüedades de la representación.
 A modo de ejemplo para esta propuesta exponemos en la Figura 5 un dibujo realizado por una alumna de 2º año de escuela secundaria, a quien se le solicitó que represente un cubo.

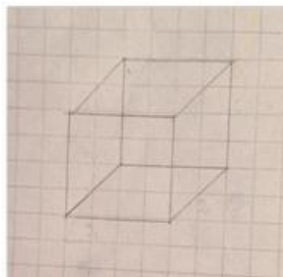


Figura 5. Representación realizada por una estudiante de secundario

A continuación, en la Tabla 3, proponemos algunas cuestiones que podrían ser analizadas sobre representaciones de alumnos.

Cuestiones a tener en cuenta sobre las representaciones de los alumnos	Ejemplos de posibles respuestas
¿Qué inquietudes surgen luego de proponer la actividad?	- Alumna: ¿De qué tamaño debemos dibujarlo?
¿Se emplearon instrumentos de dibujo?	Se empleó: lápiz, goma y regla.
¿Se utiliza algún método para distinguir caras o aristas visibles y no visibles?	No.
¿Qué tipo de sistema de representación se intenta efectuar?	Caballera.
¿Se utilizan representaciones verbales?	No.
¿Se utiliza alguna técnica personal para ayudar la acción de dibujar?	Sí, por lo visto se toma como guía el cuadriculado de la hoja en donde se dibuja.
¿El cuerpo aparece apoyado sobre la base?	Sí, y además se hace coincidir una de las aristas de la base con el renglón horizontal de la hoja.
¿Qué ambigüedades pueden surgir al intentar interpretar el dibujo?	No es posible asegurar que el cuerpo posee todas sus aristas de igual longitud. Si bien posteriormente fue borrado, la alumna en una primera instancia indicó posibles medidas para dos aristas consecutivas de la base.

Tabla 3: Posibilidad de análisis sobre representaciones de alumnos

Luego de notar la aparición de ambigüedades en las representaciones, se pueden hacer surgir cuestiones generales para estructurar las formas de representar. Por ejemplo: si vamos a dibujar aristas ocultas podemos hacerlo a través de líneas de puntos para poder identificarlas entre las otras.

5. Se forman grupos de dos alumnos: uno como “emisor” y otro como “receptor” de la comunicación. El alumno emisor cuenta con un cuerpo (una representación tridimensional del cuerpo geométrico manipulable por el estudiante), y relatará características del mismo a su compañero (el receptor) para que este vaya representándolo gráficamente. Al finalizar se compara el objeto del emisor con lo que ha obtenido el receptor (representación gráfica).

Como ninguna representación plana puede otorgarnos la misma cantidad de información que el cuerpo mismo, surgirán eventualmente disidencias y con ello la necesidad de emplear ciertos datos de los cuerpos, así como la importancia de la forma de comunicarlos tanto oralmente como gráficamente.

6. Se incorpora, al inicio, intermedio o final, o de manera transversal, un software geométrico¹ que permita dar dinamismo y aportar a la visualización de cuerpos con lo que los alumnos van a trabajar. A modo de ejemplo: tomamos una representación realizada por GeoGebra para un cuerpo geométrico proveniente del trabajo con alturas de pirámides (Tabla 4).

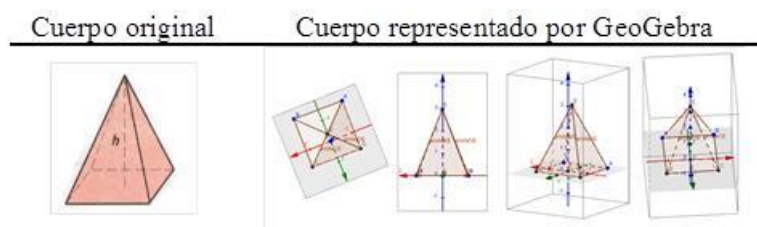


Tabla 4: Complemento para imágenes estereotipadas con software

COMENTARIOS A MODO DE CIERRE

Durante milenios el dibujo ha sido un medio importante de transmisión de ideas y hoy sigue siendo un lenguaje universal. Sus inicios se remontan a tiempos lejanos: nuestros antepasados explicaban sus ideas haciendo trazos en la arena del piso de sus cavernas (Luzadder, 1993). Artistas, constructores, arquitectos, ingenieros, diseñadores de todas las culturas y épocas han tratado con el problema de la representación de formas tridimensionales en superficies bidimensionales e, inversamente, el reconocimiento de la forma tridimensional a partir de la bidimensional (Senechal, 2008). Es así que el dibujo es la forma más antigua de expresión escrita. Spencer *et al.* (2009) sostienen que es posible que algunas técnicas desarrolladas por el hombre cambien, pero la expresión gráfica continuará siendo esencial en el futuro.

Consideramos que alcanzar conocimientos relativos al dibujo mediante el desarrollo de habilidades motoras y sensitivas posibilita la capacidad de expresión gráfica para la interpretación y resolución de situaciones problemáticas. En la carrera Profesorado en Matemática este desarrollo se encuentra implícito, generándose así el interrogante: siendo la comunicación gráfica fundamental para enseñar Geometría, ¿debería el PM trabajar

¹ Si bien hay gran variedad de programas que sirven para esta cuestión, en este trabajo no hondaremos en la cuestión de empleos de softwares geométricos, sino que nos interesa solo mencionar la utilidad que ellos pueden dar para el aprovechamiento de la habilidad de dibujo para el estudio de geometría tridimensional en la escuela secundaria.

intencionalmente el desarrollo de las habilidades de representación y comunicación del espacio 3d en su diseño curricular como lo hacen las carreras de Ingeniería?

Al momento, no tenemos una respuesta rotunda frente a esta cuestión. Por un lado, creemos que la carrera debe prestar atención al trayecto formativo en el que los futuros profesores aprenden a dibujar y también reconocer los aprendizajes que conlleva enseñar a dibujar y a interpretar dibujos a los alumnos de secundaria. Además, un docente que no sabe dibujar transfiere esa limitación a sus alumnos. Por otro lado, reconocemos que un tratamiento de la representación gráfica con el nivel de tecnicismo con el que lo realizan los futuros ingenieros, excede a las incumbencias profesionales de un profesor del área Matemática.

Las habilidades de dibujo aportan al desarrollo cognitivo del estudio de la Geometría, por lo que un futuro profesor en Matemática debe estar habilitado desde la formación a desarrollarlas así como a conocer los recursos cognitivos que devienen de las mismas. Los modos de representación en Geometría son fundantes para su correcta interpretación tanto en profesores, para su posterior tarea de enseñar, como para ingenieros, para su posterior desempeño profesional.

Pensamos que una forma de fortalecer la formación de profesores en este sentido es convocando a realizar y/o analizar propuestas didácticas del estilo de la presentada en esta ponencia, que inviten a fortalecer/resignificar la habilidad de dibujo en sus aspectos matemáticos, didácticos y de comunicación visual.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la Educación Matemática: estructura y medida. *Educación Matemática*, 18 (1): 125-158.

Arrieta, I. y Medrano, M.C. (2015). Un análisis de la capacidad espacial en estudios de ingeniería técnica. *PNA*, 9 (2): 85-106.

Barrantes, M., López, M. y Fernández, M.A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9 (2): 107-127.

Brooks, M. (2009). Drawing, Visualisation and Young Children's Exploration of "Big Ideas". *International Journal of Science Education*, 31 (3): 319-341.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2014). *Enseñanza de los cuerpos geométricos en libros de texto del ciclo básico de secundaria*. Ponencia presentada en la XI Conferencia Argentina de Educación Matemática. San Juan, octubre.

Grossi, S. y Sgreccia, N. (2015). *Representación de cuerpos geométricos en libros de texto de escuela secundaria*. Ponencia a presentarse en la XXXVIII Reunión de Educación Matemática. Santa Fe, septiembre.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *EMA. Investigación e innovación en Educación Matemática*, 3 (3): 193-220.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4º ed.). México: Mc Graw Hill.

Höffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *Mathematics Teacher*, 74(1), 11-18.

Luzadder, W. (1993). *Fundamentos de Dibujo en Ingeniería* (9° ed.). México: Prentice Hall.

Senechal, M. (2008). Forma. En: Steen, L. (Ed.), *La enseñanza agradable de las matemáticas* (149-192). México: Limusa.

Sgreccia, N. (2012). *La geometría del espacio en el Profesorado en Matemática: la generación de puentes entre la formación disciplinar y didáctica*. Tesis de Doctorado no publicada. Rosario: Universidad Nacional de Rosario.

Spencer, H., Dygdon, J. y Novak, J. (2009). *Dibujo técnico* (8° ed.). México: Alfaomega.