CLASIFICACIONES DE POLIEDROS EN ESTUDIANTES DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA. ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA

CRUZ, MARÍA FLORENCIA[1,2];MANTICA, ANA MARÍA[1,3];GÖTTE, MARCELA[1,4]

[1]Facultad de Humanidades y Ciencias. UNL.
[2]ma.florenciacruz@gmail.com,[3]ana.mantica@gmail.com,[4]marcelagotte@gmail.com

RESUMEN

Se presenta el análisis previo y lo realizado por seis estudiantes de un trabajo de investigación que involucra alumnos de la cátedra Geometría Euclídea Espacial del profesorado de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. Se realizan actividades con el propósito de conocer las características que tienen en cuenta los estudiantes para formar familias de figuras poliédricas y observar el tipo de clasificaciones que realizan. En este trabajo se estudian las respuestas de los alumnos correspondientes a la determinación de las familias, sobre un universo de diez poliedros particulares. A partir de los referentes teóricos considerados De Villiers (1994) y Guillén (1991, 2005), del análisis previo y del análisis de las familias determinadas hemos definido categorizaciones de las clasificaciones que utilizamos en este trabajo. Las categorías planteadas son clasificaciones particionales, clasificaciones inclusivas y clasificaciones solapadas.

Palabras clave: clasificaciones particionales, clasificaciones inclusivas, clasificaciones solapadas, poliedros.

INTRODUCCIÓN

Consideramos que las propuestas de enseñanza deben promover en los alumnos la oportunidad de desarrollar habilidades para adoptar una posición fundada y crítica en las diversas circunstancias en las que, como miembro de la sociedad, deberán intervenir y tomar decisiones. La elaboración y validación de conjeturas es una actividad propia del hacer matemático que genera condiciones para que el estudiante se responsabilice de la validez de sus producciones. La propuesta que presentamos se plantea para implementar con alumnos de tercer año del profesorado de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral que cursan Geometría Euclídea Espacial (GEE). Los estudiantes han cursado y aprobado Geometría Euclídea Plana, por lo que suponemos han entrado en el trabajo deductivo propio de la geometría. Los conceptos desarrollados en la cátedra GEE al momento de realizar la propuesta son: ángulos diedros, ángulos poliedros, poliedros cóncavos y convexos, poliedros regulares convexos, relación de Euler, paralelismo y perpendicularidad entre rectas, paralelismo y perpendicularidad entre recta y plano, paralelismo y perpendicularidad entre planos y transformaciones en el espacio. Para el tratamiento de estos temas los estudiantes cuentan con un texto cuyos autores son los docentes que dictan la cátedra y el texto de Geometría Métrica de Puig Adam. El problema que se aborda en este trabajo de investigación apunta a estudiar cómo determinan y validan estudiantes del profesorado de matemática las familias de poliedros. La propuesta consta de dos momentos, el primero, de reflexión individual para responder la consigna, y el segundo donde los estudiantes se reúnen en grupos de tres integrantes, para socializar las familias obtenidas fundamentando las características utilizadas para construirlas. El objetivo del trabajo en grupos es fomentar la comunicación entre los estudiantes y observar las distintas estrategias de trabajo de cada uno, los conocimientos que aplican y el modo de validar sus afirmaciones. En este trabajo presentamos el análisis previo y lo realizado por seis de los estudiantes y el correspondiente trabajo en los dos grupos formados por ellos en la determinación de las familias sobre un universo de diez poliedros. Para el desarrollo de la propuesta se construyen modelos de dichos poliedros. Algunos grupos reciben estos modelos construidos en un material denominado Polydron que consiste en un conjunto de polígonos realizado en plástico que poseen bisagras para unirse y formar poliedros. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (dos tamaños), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares, octógonos regulares y otros grupos reciben representaciones tridimensionales planas. La totalidad de los estudiantes reciben dos de los poliedros con representaciones en software de geometría dinámica dado que Polydron no permite realizar estos poliedros que nos interesa que formen parte del universo (pirámide y prisma oblicuos), los estudiantes conocen el software y pueden utilizar las herramientas que les brinda el mismo para validar sus afirmaciones.

MARCO DE REFERENCIA

La actividad de clasificar es una de las características esenciales de cualquier rama del pensamiento humano y, en particular, una actividad fundamental en las matemáticas. La clasificación más frecuente en la vida cotidiana se realiza formando subconjuntos disjuntos o partición, y esto dificulta en ocasiones la clasificación por inclusión que se realiza en matemática. Cuando se trabaja con conceptos matemáticos se requiere una organización, un dar nombres, es decir una clasificación. Guillén (1991,2005) sostiene que la enseñanza conduce a considerar las clasificaciones como particiones, las condiciones que se imponen a las clasificaciones particiones es que las subfamilias establecidas deben ser disjuntas y deben de dar cuenta de la totalidad del universo objeto

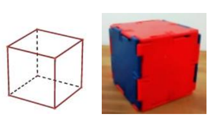
de clasificación. Hay varios tipos de clasificaciones particiones, las establecidas con un criterio (pudiendo variar el criterio considerado) y las establecidas con varios criterios. Las clasificaciones particiones pueden ser disjuntas es decir sus clases no tienen elementos en común, o solapadas en este caso las clases comparten elementos. Para convertir las clasificaciones solapadas en disjuntas se agrega uno o varios adjetivos hasta lograr que las clases no compartan elementos. Por ejemplo, si a los prismas los clasificamos en rectos, oblicuos, regulares e irregulares hay solapamiento, pero si consideramos prismas rectos de bases regulares, prismas rectos de bases irregulares, prismas oblicuos de bases regulares, prismas oblicuos de bases irregulares se transforma en disjunta. En la mayoría de las clasificaciones se establecen solamente dos clases, por un lado los objetos que cumplen una propiedad y por otro los que no la cumplen, estas son clasificaciones dicotómicas. La clasificación jerárquica indica la clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos de los más generales. Los aspectos fundamentales de estas clasificaciones son el establecimiento de las clases y las relaciones de inclusión entre ellas. Las clasificaciones inclusivas más naturales son en las que las clases resultantes tienen el nombre genérico y uno o varios adjetivos. Respecto de estas clasificaciones también queremos subrayar que las familias establecidas pueden tener varios nombres: correspondientes a los de todas las familias que las contienen, por ejemplo prisma recto de base cóncava.
De Villiers (1994) considera que en la clasificación jerárquica se hace referencia a la clasificación de un conjunto de conceptos de tal manera que los conceptos mas particulares forman subconjunto de los conjuntos más generales, y que en la clasificación por partición de conceptos los distintos subconjuntos de conceptos diferentes son considerados disjuntos unos de otros. La investigación realizada por De Villiers (1994) muestra que muchos alumnos, incluso después de comparaciones en tablas y otras actividades, si se les da la oportunidad, prefieren definir en particiones. Los estudiantes pueden llegar a entender que hay ciertas ventajas en aceptar una clasificación jerárquica por medio de una discusión que compare las ventajas y desventajas relativas de esas dos maneras de clasificar y definir, que son ambas matemáticamente correctas. En general las definiciones particionales son más largas pues tienen que incluir propiedades adicionales para asegurar la exclusión de casos especiales, mientras que las definiciones jerárquicas aseguran que todos los teoremas demostrados para un concepto se aplican automáticamente a sus casos especiales. En matemática, en general, se utilizan clasificaciones jerárquicas debido a las ventajas que proporciona dado que conduce a definiciones más económicas de los conceptos y la formulación de teoremas; simplifica la sistematización deductiva y la derivación de las propiedades de conceptos especiales; puede proporcionar un esquema conceptual más útil en la resolución de problemas; algunas veces sugiere definiciones alternativas y nuevas proposiciones y además proporciona una perspectiva global útil. No obstante sostiene que las clasificaciones y sus correspondientes definiciones son arbitrarias y no absolutas y que considerar entre jerárquicas y absolutas es una opción personal o de conveniencia. Encontró un caso en un libro de texto antiguo de geometría con sólo definiciones por partición, explicitando la definición de rombo como un paralelogramo con sus lados iguales pero sus ángulos no rectos. Este tipo de clasificaciones particionales es posible encontrarlas en el libro I de los Elementos de Euclides: “de entre las figuras cuadriláteras, cuadrado es la que es equilátera y rectangular, rectángulo la que es rectangular pero no equilátera, rombo la que equilátera pero no rectangular,…” (Euclides, 1991, 195)

ANÁLISIS PREVIO

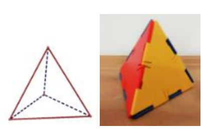
En la implementación de la actividad se les distribuyen a los estudiantes un conjunto de diez modelos de poliedros para la formación de familias, la mitad de los estudiantes reciben ocho polie-

dros en representaciones planas y la otra mitad ocho poliedros en materiales manipulativos y a todos se les entregan dos de los poliedros representados en un software de geometría dinámica. Analizando libros de texto de nivel primario y secundario que abordan la temática de poliedros como el texto utilizado en la cátedra Geometría Euclídea Espacial podemos afirmar que inicialmente tenemos cierta organización de los poliedros que nos permite separarlos por determinadas características, de allí que le hayamos dado nombre a algunas familias de poliedros como prismas, pirámides, poliedros regulares, entre otras ya que de esto se tiene previamente una cierta idea y las denominaremos familias reconocidas. Se puede aprovechar el que se tengan poliedros de una clase para obtener los de otra clase contenida, pero esto más bien se tiene en cuenta porque facilita la tarea de determinación de los elementos de la clase; solo hay que descartar los poliedros que no cumplan la otra u otras de las condiciones impuestas. Para Guillén (1991), "con este tipo de clasificación el que las familias estén relacionadas con la relación de inclusión no es lo esencial" (p.33). En un primer momento se les presenta la actividad a los estudiantes esperando respuestas individuales, luego se reunirán en grupos de a tres para compartir lo realizado en forma individual y permitir un momento de reflexión grupal acerca de las familias propuestas por cada uno, a continuación se hará una puesta en común con todos los partícipes de la actividad. La segunda actividad no tiene momentos de trabajo individual sino que continúan el trabajo en los grupos anteriormente formados, al finalizar al igual que en la primera actividad se hará una puesta en común donde cada grupo podrá exponer las familias de poliedros formadas.
Se presentarán a los estudiantes las siguientes tareas:
Primera tarea: Dividir los diez poliedros dados, utilizándolos a todos, en no menos de tres familias que contengan cada una al menos a dos de ellos.
Segunda tarea: Dividir los diez poliedros dados, utilizándolos a todos, en no menos de tres familias que contengan cada una al menos a dos de ellos y que cada poliedro pertenezca a una y solo una familia.
A continuación presentamos los modelos de poliedros que se entregarán a los estudiantes para resolver la tarea dada.

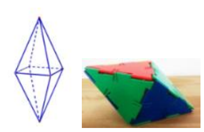
1. Cubo



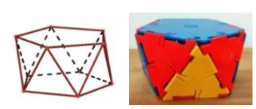
2. Tetraedro regular o pirámide



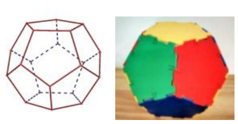
3. Octaedro o antiprisma



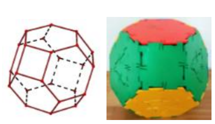
4- Antiprisma



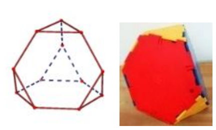
5- Dodecaedro regular



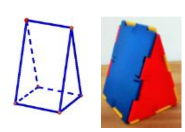
8- Octaedro truncado[1]



9- Tetraedro truncado[2]

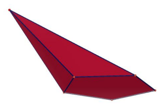


10- Prisma



[1]Denominación tomada de Guillén (1991)
[2]Denominación tomada de Guillén (1991)

6- Pirámide oblicua, base pentágono regular[3]



7- Prisma oblicuo, base trapezoide[4]

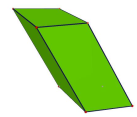


Figura 1.: Modelos de los poliedros.

Realizamos una descripción de los poliedros, que su sola denominación no permite determinar los polígonos que los forman:
Poliedro (3) sus caras son triángulos isósceles iguales.
Poliedro (4) sus bases son pentágonos regulares y sus caras laterales triángulos equiláteros.
Poliedro (6), es una pirámide oblicua, sus caras laterales triángulos no congruentes y su base es un pentágono regular.
Poliedro (7), es un prisma oblicuo, sus caras laterales son paralelogramos y sus bases trapezoides en planos paralelos.
Poliedro (8), sus caras son cuadrados y hexágonos regulares y concurren dos hexágonos y un cuadrado por vértice.
Poliedro (9), sus caras son hexágonos regulares y triángulos equiláteros y concurren dos hexágonos y un triángulo en cada vértice.
Poliedros (10), prisma con bases triángulos isósceles y caras laterales dos rectángulos congruentes y un cuadrado.
Destacamos que no se entregan los nombres que identifican los poliedros a los estudiantes para no direccionar las posibles familias, se los presenta de este modo para utilizar un lenguaje específico en el presente trabajo. En la implementación de la propuesta se identifican con números para una mejor comunicación en la puesta en común. Se presentan a continuación algunas de las familias que se esperan obtener en la implementación de la actividad.

Clasificación tipo uno: El criterio considerado para la clasificación es el número de caras que tiene el poliedro.

• cuatro o cinco caras 2- 10	• seis caras 1- 6- 7
• ocho caras 3- 9	• al menos doce caras 4- 5- 8

Tabla 1.: Clasificación tipo uno.

Clasificación tipo dos: El criterio considerado para la clasificación es la utilización de algunas familias conocidas, antiprismas y el resto.

[3] Poliedro construido con Cabri 3D
[4] Poliedro construido con Cabri 3D

• Pirámides 2- 6	• Prismas 7-1- 10
• Antiprisma 3- 4	• No es ninguno de los anteriores 5- 8- 9

Tabla 2.: Clasificación tipo dos

Clasificación tipo tres: El criterio considerado para la clasificación es la regularidad de las caras, de los ángulos poliedros y de la congruencia entre las caras.

• Poliedros regulares 1- 2- 5	• Poliedros semirregulares[5] 8- 9	• Poliedros no regulares ni semirregulares (3) (4) (6) (7) (10)

Tabla 3.: Clasificación tipo tres

Clasificación tipo cuatro: El criterio considerado para la clasificación es la utilización de familias conocidas y el resto.

• Pirámide o prisma recto 1- 2- 10	• Pirámide o prisma oblicuos 6- 7	• No pertenece a las anteriores 3- 4- 5- 8- 9

Tabla 4.: Clasificación tipo cuatro

Clasificación tipo cinco: El criterio considerado para la clasificación es el número de lados de las caras que tiene el poliedro.

• Tiene caras triangulares 3- 2-		
• Tiene caras pentagonales 4- 6	• Tiene caras hexagonales 9	• Tiene caras cuadriláteros 10-
5-	8	1- 7

Tabla 5.: Clasificación tipo cinco

Clasificación tipo seis: El criterio considerado para la clasificación es la utilización de familias conocidas, antiprismas y semirregulares.

[5] Se define poliedro semirregular al poliedro convexo que cumple las siguientes condiciones: sus caras son polígonos regulares y sus ángulos poliedros son iguales.

• Pirámides (6)	• Prismas (7) (10)	• Antiprisma (3)
• Poliedros regulares (2) (5)	(1)	• Poliedros semirre-gulares (4) (8) (9)

Tabla 6.: Clasificación tipo seis

Clasificación tipo siete: El criterio considerado para la clasificación es la regularidad de las caras que forman el poliedro.

• Tiene caras regulares 6-10	• No tiene caras regulares 3- 7
• Todas son regulares 1- 2- 4- 5- 8-9	

Tabla 7.: Clasificación tipo siete

Clasificación tipo ocho: El criterio considerado para la clasificación es el número de pares de planos paralelos que contienen a las caras que forman al poliedro.

• Con caras paralelas 1- 3- 4- 5- 8- 9-	• Ningún par de caras paralelas 2- 6-
• Sólo un par de caras paralelas 7- 10	

Tabla 8.: Clasificación tipo ocho

Clasificación tipo nueve: El criterio considerado para la clasificación son el tipo de ángulos poliedros que tienen.

• Tiene ángulos triedros	
• Tiene ángulos que no son triedros 6	• Todos los ángulos son triedros 1- 2- 5- 7- 8- 9-10
3- 4	

Tabla 9.: Clasificación tipo nueve

Clasificación tipo diez: El criterio considerado para la clasificación es convexidad, la regularidad de las caras que forman el poliedro y la igualdad de las caras.

Poliedros convexos

- Con caras regulares
  (6) (10)
  - Todas caras regulares
    (8) (4) (9)
    - Todas caras regulares iguales
      (1) (2) (5)
- Sin caras regulares
  (3) (7)

Tabla 10.: Clasificación tipo diez

ANÁLISIS DE LO REALIZADO POR LOS ESTUDIANTES

En el momento de la implementación de la tarea se encuentran presentes 11 estudiantes, para el análisis que presentamos en este trabajo consideramos seis de ellos que en el momento de trabajo grupal constituyen dos grupos, uno de estos recibió los poliedros realizados en Polydron y otro sus representaciones tridimensionales planas.
En primer lugar consideramos el grupo que tiene los modelos realizados en Polydron. Trabajo individual:

Estudiante D

1. *Poliedros regulares convexos:1- 2- 5*
2. *Poliedro irregulares convexos: 3- 6- 7- 10*
3. *Poliedros convexos: 4- 8- 9*

La alumna en cada caso especifica las características que deben cumplir los poliedros de cada una de las clases que considera. Poliedros regulares convexos: *todas las caras que conforman a los poliedros son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices concurren un mismo número de ellos*, poliedros convexos irregulares: *algunas de las caras que conforman al poliedro no son polígonos regulares* y poliedro convexo: *no todas las caras que conforman a los poliedros son polígonos regulares iguales entre sí.* A partir de la última característica observamos que la estudiante desconoce un convenio acordado por la comunidad matemática y la comunidad clase. Considera familias que no tienen elementos comunes.

Estudiante J

1. *Poliedros regulares: 1- 2- 3- 5*
2. *En cada vértice concurren tres aristas: 8- 2- 10- 4- 6- 9*
3. *Caras son polígonos regulares: 1- 9- 8- 2- 4- 5*
4. *Igual número de caras: 8 y 4- 9 y 3- 1, 6 y 7*

No respeta el acuerdo convenido en la cátedra dado que reconoce al 3 (octaedro no regular) como poliedro regular. En la característica utilizada en *2* hay cuestiones erróneas, por un lado toma poliedros que no cumplen la condición y deja de lado otros que si la cumplen. Teniendo en cuenta los poliedros que considera en *1* y *3* inferimos que para la alumna los poliedros regulares son los que están formados por polígonos iguales.

En la *4* considera una característica que no le permite armar una familia, por esta razón considera un número de caras y busca los poliedros que la cumplen, otro número de caras y repite la acción. Analizando el audio de la interacción entre los estudiantes del grupo, la alumna J justifica esta característica diciendo "es una clasificación mentira, la agrego porque me falta el 7 (prisma oblicuo, base trapezoide)". Considera familias que tienen algunos elementos en común.

Estudiante S

1. *Regulares: 1-2- 3- 5*
2. *Irregulares: 4- 6- 7- 8- 9-10*

No logra finalizar su clasificación

El estudiante escribe cóncavo- convexo/ regular- irregular dejando claro que va a considerar una clasificación dicotómica. Comienza a contar el número de caras en cada uno de los poliedros y a su vez el número de caras iguales, sólo con esto establece cuales son regulares y cuales irregulares considerando como la alumna **J** el poliedro 3, por tener todas sus caras iguales, como regular. En la discusión grupal explica que debe hacer una subdivisión de alguna de ellas para responder a la consigna, y plantea dentro de los poliedros irregulares, dos posibilidades ambas dicotómicas.

a_1- poliedros irregulares que tienen más de 10 caras: 8- 4
a_2- poliedros irregulares que tienen menos de diez caras: 9- 10- 7- 6
b_1- los poliedros irregulares que contienen solo caras regulares: 4-8-9
b_2- los otros: 6- 7- 10

Trabajo grupal

Los estudiantes se reúnen en grupo y deben lograr una única clasificación. El alumno **S** afirma que su clasificación no está terminada, consideran una característica que es común a los tres, poliedros regulares, como no tienen los mismos poliedros en esta familia discuten sobre la definición de poliedro regular, la buscan en el apunte de cátedra, y acuerdan que el 3 no es regular por no cumplir la condición de que sus caras sean polígonos regulares. En la clasificación realizada por **D** y **S** aparece la familia de poliedros irregulares, por tanto toman la de **D** para armar la grupal. Realizan una clasificación donde las familias definidas no tienen poliedros en común.

• Poliedros regular 1- 2- 5	• Poliedros irregulares, sus caras son regulares pero no iguales entre si 4- 8- 9	• Poliedros irregulares, poseen caras irregulares. 3- 10-6- 7

*Tabla 11.: Clasificación grupo **D, J, S**, tarea uno.*

Cuando se plantea la segunda actividad la alumna **D** se retira, **J** y **S** logran darse cuenta que la clasificación realizada en la primer tarea responde a lo que se les pide, se preguntan si será la única o habrá otra. Centran su atención en la clasificación de la alumna **J** y por tanto comienzan a considerar el número de aristas que concurren en los vértices.

• Poseen vértices en el que concurren tres aristas y tienen al menos una cara que es cuadrado 1- 8- 10	• Poseen vértices en el que concurren tres aristas y no tienen ninguna cara que sea cuadrado 9- 7- 2- 6- 5	• Poseen vértices en los que concurren 4 aristas 3- 4

*Tabla 12.: Clasificación grupo **D, J, S**, tarea dos.*

En segundo lugar consideramos el grupo que tiene los modelos en representaciones tridimensionales planas.
Trabajo individual
Estudiante A

1. Familia de poliedros de cuatro lados: 1- 10- 7- 8
2. Familia de base pentagonal: 6- 4- 5
3. Familia de base triangular: 2- 3- 9- 4- 10-
4. Familia de base hexagonal: 8- 9

La expresión que utiliza **A** en la familia 1 “cuatro lados” refiere a cuadrilátero. En el momento de trabajo grupal las alumnas discuten sobre el concepto de base, y acuerdan que no es correcto como esta alumna lo considera.
Estudiante Y

1. Todos aquellos poliedros que tengan al menos una cara que sea un cuadrilátero: 1- 10- 7- 8
2. Son todos los poliedros que contengan al menos una cara que sea pentágono: 4- 5- 6
3. Poliedros que tienen al menos una cara que es un triángulo: 3- 2- 9- 6- 10- 4

La estudiante realiza una clasificación donde las familias tienen algunos elementos comunes, observa una característica para armar la clasificación.
Estudiante B

1. Poliedros que tienen al menos una cara pentagonal: 4- 5- 6
2. Los que tienen 6 caras o menos: 10- 6- 7- 2- 1
3. Las caras son el mismo polígono: 1- 5- 2- 3
4. Formen una pirámide con alguna de sus caras: 2- 3- 6
5. Poliedros regulares: 1- 2- 5

La alumna no logra responder la consigna dado que no utiliza los diez poliedros dados. Falta considerar los poliedros 8 y 9.
Trabajo grupal
Descartan las familias propuestas por la estudiante **B** porque no cumple la consigna y porque ella mira diferentes características, consideran que es mejor mirar una única característica. Al no acordar el concepto de base que se utiliza en la clasificación de **A** deciden trabajar sobre la de **Y**. La clasificación que proponen esta formada por familias con algunos elementos en común.

• Tiene caras triangulares 3- 2- 9-	
• Tiene caras pentagonales 4- 6	• Tiene caras cuadriláteros 10
5-	7- 8- 1

*Tabla 13.: Clasificación grupo **A**, **Y**, **B**, tarea uno.*

Para la actividad 2 la alumna **B** dice hay 3 que están superpuestos, comienzan a agregar adjetivos a las clasificaciones anteriores para lograr una clasificación en las que las familias no tengan elementos en común.

• Todas sus caras son triángulos 2- 3	• Seis de sus caras son cuadriláteros 1- 7- 8-
• Tiene caras pentagonales	• Alguna pero no todas sus caras son triángu-

4- 5- 6	los y en cada vértice concurren 3 aristas 9- 10

*Tabla 14.: Clasificación grupo **A**, **Y**, **B**, tarea dos.*

REFLEXIONES FINALES

Teniendo en cuenta que las clasificaciones obtenidas en el análisis previo realizado y en las respuestas planteadas por los estudiantes no responden en forma estricta a las mencionadas por Guillén (1991, 2005) o por De Villiers (1994), autores considerados en el marco de referencia, plantearemos una clasificación que consideramos nos permite realizar el análisis del trabajo elaborado por los estudiantes del profesorado de matemática. A continuación expresamos la denominación y la caracterización que daremos a las clasificaciones según las relaciones entre las familias que quedan determinadas, éstas son:

Clasificaciones particionales: las familias que los forman no tienen poliedros en común. Clasificaciones inclusivas: existe una relación de inclusión entre todas las familias determinadas. Cada familia excepto el universo está incluida en otra.

Clasificaciones solapadas: son las no inclusivas ni particionales.

En las familias que se presentaron en el análisis previo, son clasificaciones particionales la clasificación tipo uno, tipo dos, tipo tres y tipo cuatro, clasificación inclusiva la tipo diez y clasificaciones solapadas la tipo cinco, tipo seis, tipo siete, tipo ocho y la tipo nueve. En las familias que presentaron los estudiantes en el momento de trabajo individual sólo la alumna **D** realiza una clasificación particional, los alumnos **J**, **A**, **Y**, y **B** realizaron clasificaciones solapadas. Por lo expresado anteriormente se aprecia que las clasificaciones propuestas por los estudiantes son de tipo particionales o solapadas, no aparecen clasificaciones inclusivas, los autores considerados en el marco de referencia, plantean que por lo general los estudiantes se caracterizan por preferir las clasificaciones que consideramos de tipo solapadas o particionales.

Teniendo en cuenta que los estudiantes están en el tercer año del profesorado de matemática y han cursado geometría euclídea plana, se espera que elaboren clasificaciones inclusivas ya que es así como se les presenta la clasificación de cuadriláteros que se desarrolla en esa cátedra. Por lo que estos estudiantes han realizado un trabajo deductivo, propio del quehacer geométrico, haciendo uso de las ventajas que las clasificaciones inclusivas ofrecen, De Villers expresa que definiciones jerárquicas aseguran que todos los teoremas demostrados para un concepto se aplican automáticamente a sus casos especiales, exaltando así las ventajas de este tipo de clasificaciones.

Para lograr una mayor seguridad sobre estas suposiciones realizaremos entrevistas a alumnos que participaron de la actividad y de este modo tener más argumentos que nos permitan vislumbrar por qué tomaron dichas clasificaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Villiers, M. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. For the Learning of Mathematics 14(1) 11-18. Disponible en http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/classify.pdf

Euclides. (1991). *Elementos*. Libros I-IV. Trad. María Luisa Puertas Castaños. Madrid: Gredos.

Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis.

Guillén Soler, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. Educación Matemática, 17 (2) 117-152

Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I. Fundamentos. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.