LA PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y DE FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

CALANDRA, MARÍA VALERIA[1,3] *;COSTA, VIVIANA ANGÉLICA* [2,4]

[1] UIDET Gamefi, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP
[2] UIDET IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, UNLP
[3] mava@mate.unlp.edu.ar
[4] vacosta@ing.unlp.edu.ar

RESUMEN

De la experiencia docente en cursos de Probabilidades y de Estadística en la Facultad de Ingeniería de la UNLP, hemos advertido distintas problemáticas que los alumnos presentan en el aprendizaje de los contenidos en esas asignaturas. En particular, los vinculados a los conceptos de variable aleatoria continua y el de función de densidad de probabilidad, que se encuentran entre aquellas que generan en los alumnos complejidades al momento de su aplicación en problemas concretos, que no radican en las técnicas matemáticas, sino en las aplicaciones e interpretaciones adecuadas que serán de práctica corriente en su actividad profesional. Este trabajo es una investigación preliminar sobre el análisis de esas dificultades, que tiene por objetivo mejorar su enseñanza, de modo de reivindicar la razón de ser de estos objetos matemáticos y de luchar contra la resolución mecánica de las situaciones problemáticas por parte de los alumnos. Es un punto de partida para estudiar las posibles estrategias didácticas que podrían colaborar a tal fin, en comunión con ciertas ideas teóricas que se presentan con el objeto de "renovar" la enseñanza de la matemática, de luchar en contra del "envejecimiento de los saberes" y de la pérdida de sentido.

Palabras clave: enseñanza, probabilidades, variable aleatoria continua, función de densidad de probabilidad.

ANTECEDENTES SOBRE EL TEMA

Existen investigaciones en el área educativa que advierten de las dificultades en el aprendizaje por parte de los alumnos universitarios en temáticas relativas a probabilidades, en particular en el concepto de variable aleatoria y de función de densidad de probabilidad. Huck *et al.* (1986) han encontrado dificultades asociadas a la interpretación de la distribución Normal Estándar, indican que algunos estudiantes creen que todas las puntuaciones tipificadas han de tomar un valor comprendido entre -3 y +3, mientras que otros opinan que no hay límite para los valores máximo y mínimo de estas puntuaciones. Hawkins *et al.* (1992) describen en su trabajo los errores que cometen los alumnos universitarios a aproximar la distribución binomial mediante la distribución normal, observan que en general aplican la corrección por continuidad de una forma mecánica, sin entender su significado. Wilensky (1995) en su trabajo propone un problema a personas de distintas edades, incluyendo a profesionales con conocimientos de estadística y observa que en general, los sujetos de su investigación sabían resolver problemas relacionados con la distribución normal, pero no eran capaces de justificar el uso de la distribución normal en lugar de otro concepto o distribución. Tauber (2001, citado por Ruiz, 2006), centra su estudio en el aprendizaje de alumnos universitarios de la distribución Normal y advierte sobre la existencia de ciertas dificultades de los alumnos para distinguir la distribución teórica y empírica, sobre todo cuando se ven en la necesidad de resolver problemas abiertos. También menciona que en los libros de texto no siempre se relaciona el estudio de la estadística descriptiva con el de la variable aleatoria y con el de las distribuciones de probabilidad. Es decir, no se hace una conexión entre el estudio del modelo probabilístico y el análisis de datos empíricos. Behar Gutiérrez y Grima Cintas (2013) afirman que en cursos básicos de estadística, el capítulo que corresponde a Estadística Descriptiva, aparece como un tema aislado, que podría estudiarse antes o después de las temáticas de Probabilidades. En estas condiciones no se aprovechan algunos desarrollos de la Estadística Descriptiva que podrían ser usados como un puente intuitivo para la comprensión de resultados más abstractos de la teoría de la probabilidad. Hacen referencia específica al concepto de histograma como representación de la función empírica de densidad para dar sentido a la definición de variable aleatoria continua. Afirman que la definición de variable aleatoria continua, es muy poco intuitiva e introduce la función de densidad de probabilidad de manera muy artificial. Un trabajo reciente es el de Nardecchia y Hevia (2003), quienes realizaron una investigación bibliográfica histórica tendiente a encontrar los posibles obstáculos didácticos en el aprendizaje de la variable aleatoria. Argumentan que, los estudiantes tienen predominantemente desarrollado el pensamiento determinístico sobre el probabilístico y que esto puede influir aún más en la presencia de ese obstáculo principalmente en la enseñanza superior. Concluyen, también, que históricamente no ha sido simple la construcción de un modelo adecuado a partir de los datos observados, de modo que esta vinculación entre la realidad y la variable aleatoria (como modelo matemático) puede constituir otro obstáculo con el que se podría enfrentar un estudiante.

Así mismo, ellos enfatizan en la importancia de realizar estudios que nos indiquen la transposición didáctica que el concepto matemático 'variable aleatoria' ha sufrido para poder ser incorporado a la enseñanza en las instituciones educativas. Ruiz y Albert (2005) abordan lo que consideran ellos como una de las ideas fundamentales en los cursos de Probabilidad y Estadística en las instituciones de enseñanza universitaria: la enseñanza del concepto variable aleatoria en general. Utilizan como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica. Su trabajo consiste en saber cuál es el estado de apropiación de algunas ideas fundamentales estocásticas relativas a la variable aleatoria en dos estudiantes que acaban de ingresar al nivel universitario. Según estos autores, la pertinencia del desarrollo de un proyecto de investigación alrededor de la didáctica de la variable aleatoria se sustenta tanto en dificultades en su enseñanza y aprendizaje, como en razones propias del desarrollo del concepto en la probabilidad y la estadística como ciencias. Opinan además que el concepto de variable aleatoria propicia el paso de la estadística descriptiva y probabilidad básica hacia modelos probabilísticos.

PLANTEO DEL PROBLEMA

El presente trabajo es parte de la etapa inicial de una investigación que se enmarcará en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), propuesta por Yves Chevallard (2004, 2007, 2012). La misma pretende introducir en el aula la *Pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo* (PICM) (Otero *et al.*, 2013), con el objetivo de enfrentar los fenómenos denominados: *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las cuestiones que se estudian en la escuela media y en la universidad. Para ello, Chevallard propone la aplicación de *dispositivos didácticos* denominados Actividades de Estudio e Investigación (AEI) y Recorridos de Estudio e Investigación (REI).

En esta primera etapa se analizará la problemática involucrada en la enseñanza y aprendizaje universitario, en este caso en la asignatura Probabilidades para las carreras de la FI UNLP, de los conceptos de variable aleatoria continua y el de función de densidad de probabilidad. Estos temas, particularmente, se encuentran entre aquellos que generan en los alumnos complejidades al momento de su aplicación en problemas concretos, que no radican en las técnicas matemáticas, sino en las aplicaciones e interpretaciones adecuadas que serán de práctica corriente en su actividad profesional. Muchas veces se observa que los estudiantes resuelven las situaciones problemáticas de un modo mecánico sin entender realmente el significado y la razón del procedimiento realizado.

Esta investigación se apoya en el hecho de que en la organización de las asignaturas Probabilidades y Estadística no se hace una conexión entre el estudio del concepto probabilístico de variable aleatoria y densidad de probabilidad con el análisis estadístico de los datos experimentales, por lo que los modelos matemáticos pierden su razón de ser dado que no se relacionan con los datos que se pretende modelar. Esta enseñanza descontextualizada y técnica obstaculiza la comprensión de esos objetos matemáticos.

De manera de describir parte de la situación se hará referencia a como se introduce la temática en los cursos de probabilidades en la FI UNLP, el significado asignado a los objetos matemáticos, motivo de este trabajo, en la bibliografía de uso corriente y algunos de los problemas identificados en lo realizado por los alumnos en dichos cursos.

Marco Institucional y Disciplinar de los conceptos: variable aleatoria continua y función de densidad de probabilidad.

En las guías correspondientes a los cursos, en los que desempeñamos nuestra práctica docente, se introduce el concepto de la siguiente forma:

Hay variables aleatorias cuyo rango son todos los números reales de un intervalo dado, (es decir es un conjunto infinito no numerable) que corresponden a variables aleatorias que llamaremos continuas. En el caso de estas variables la probabilidad asociada a un suceso elemental es igual a cero, así que en lugar de trabajar con la probabilidad de valores particulares de la variable, se trabaja con la función de distribución de dicha variable. Para esto último se usa una función que mide la "concentración" de probabilidad alrededor de un punto, que se denomina "función de densidad de probabilidad" y se denota como f(x).

Una función de densidad de probabilidad debe cumplir con las siguientes propiedades:

1. $f(x) \geq 0$ la función es no negativa para cualquier valor de $x \in (-\infty,\infty)$ (*f(x)* no es una probabilidad, y puede valer más de 1).
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (el área bajo la curva de la función vale 1).

Para cualquier conjunto *B* de números reales

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

Si *B* es el intervalo real $[a,b] = \{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$ entonces

$$P(X \in B) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Si a = b entonces

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

Es decir, la probabilidad que una variable aleatoria continua tome algún valor fijo es cero. Por lo tanto, para una variable aleatoria continua se cumple que:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

La función de distribución acumulada para una variable aleatoria continua se calcula como se muestra en la siguiente expresión.

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

La probabilidad de que la variable esté dentro de un intervalo *[a, b],* para una variable aleatoria continua, se calcula como diferencia de valores de la función de distribución acumulada en sus extremos. Esto es debido a que para variables aleatorias continuas se cumple que:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$$

Y como

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Entonces

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)\,.$$

En alguna bibliografía de textos de probabilidades como por ejemplo en el libro del autor Maronna (1995), se introduce la temática con mayor rigor matemático y se puede encontrar una interpretación para la función de densidad de probabilidad cuando *f(x)* es continua. En ese caso $p(x-\delta < X < x+\delta) = 2\delta f(x)+o(\delta)$, donde "$o$" es un infinitésimo de orden mayor que δ; de manera que *f(x)* sirve para aproximar la probabilidad de un "intervalito" alrededor de x.

En el caso del libro de Devore (2008), se presentan las temáticas variable aleatoria continua y función de densidad de probabilidad introduciendo un ejemplo y relacionándolas con los conceptos de estadística descriptiva de modo de darle una interpretación intuitiva a estos objetos matemático. Propone problemas aplicados, el tema en cuestión es tratado con más libertad y con menos herramientas teóricas que el anterior.

En tanto que el autor Meyer (1992) introduce el concepto de función de densidad de probabilidad sin relacionarlo con temas de estadística pero sin mucho rigor matemático. Muestra una interpretación del tema desde el punto de vista probabilístico, aplica el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral para dotar de significado a la función de densidad:

$$P(x \leq X \leq x+\Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(s)ds = \Delta x f(\xi), \qquad x \leq \xi \leq x+\Delta x$$

Si Δx es pequeño, $f(x)\Delta x$ es *aproximadamente* igual a $P(x \leq X \leq x+\Delta x)$.

En cuanto al libro de Montgomery y Runger (2006), no se observa una explicación abstracta de estas temáticas y refiere que un histograma es una aproximación de una función de densidad de probabilidad. Se explica que para cada intervalo del histograma, el área del rectángulo correspondiente es igual a la frecuencia relativa o proporción de mediciones en el intervalo. De un modo similar, el área bajo *f(x)* en cualquier intervalo es igual a la probabilidad real de que una medición esté en ese intervalo.

CASOS DE ESTUDIO

A partir de la definición indicada previamente y de la descripción de las propiedades de algunas variables aleatorias continuas (Exponencial, Uniforme, Normal), los alumnos encaran la resolución de situaciones problemáticas sobre el tema. Para realizar una descripción de las dificultades se mostrarán ejemplos de situaciones que resultan confusas de interpretar por parte de los alumnos. Estos casos de estudio que planteamos son solo algunos de aquellos que presentan la problemática indicada previamente. En lo que sigue mostramos los casos de estudio y un breve análisis del problema que se observa en cada uno de ellos. Algunos de los ejemplos mostrados se observan en la actividad práctica en el aula y otros en evaluaciones diagnósticas sobre las temáticas específicas.

Caso 1:
La función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X = "peso neto en libras de un paquete de herbicida químico" es

$$f(x) = 1/3 \ \ para\ 47 < x < 50\ libras$$

a) Calcular la probabilidad de que un paquete pese más de 48 libras.
b) Calcule la proporción de paquetes que pesan más de 48 libras.

En este ejercicio el problema aparece ante la necesidad de responder el inciso b) cuya solución es la misma que para el inciso a), pero para los alumnos no es intuitivamente razonable. Preguntan si la función de densidad denota el peso de un sólo paquete o el peso de muchos paquetes.

Caso 2:
Una máquina expendedora de bebidas gaseosas se regula para que sirva una media de 200 mililitros por vaso. Si la cantidad de bebida se distribuye normalmente con una desviación estándar de 15 mililitros.

a) ¿Qué cantidad de bebida debería contener un vaso como mínimo de manera de que se derrame sólo el 10% de las veces?
b) ¿Qué cantidad de bebida contendrá como mínimo el 10% de los vasos más llenos?

En este ejercicio se les presenta una dificultad similar que para el Caso 1, pero ellos deben identificar qué mide la variable aleatoria y encontrar un valor de la misma en lugar de calcular una probabilidad. En este caso se pregunta lo mismo en a) y en b) pero de distinto modo, los alumnos creen que se trata de distintas variables aleatorias ya que en a) se habla del contenido de un vaso y en b) de más de uno.

Caso 3:
Se corta una varilla de mimbre en un punto al azar. Calcular la probabilidad de que la longitud del lado mayor sea más del doble de la del menor.

En este ejemplo, es frecuente observar que los alumnos no identifican cual es la función de densidad de probabilidad asociada al experimento, ni tampoco, como definir la variable aleatoria, expresan que falta información y preguntan: ¿Cuál es la función de densidad de probabilidad?
En estos casos el alumno, como se estudia en clase, debería identificar que se trata de un problema en el que se aplica la distribución uniforme como se observa en la Tabla 1.

Resolución correcta: *Si l es la longitud de la varilla. Se define X: "punto de corte de la varilla de longitud l"* *X ~ U[0,l]. Se quiere calcular:* $P(X < l/3 \cup X > 2l/3) = P(X < l/3) + P(X > 2l/3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Tabla 1. Resolución correcta del Caso 3.

Caso 4:

Cierto tipo de componente puede ser comprado nuevo o viejo. El 50% de los componentes nuevos duran más de 5 años, pero solo el 30% de los usados duran más de 5 años. ¿Sería posible que las duraciones de los componentes se distribuyan exponencialmente? Explique.

Resolución correcta: *X: "años de vida de un componente". Sea t > 0. Del enunciado del problema se desprende que:* $P(X > 5) = 0{,}5$ *y que* $P(X > t+5 / X > t) = 0{,}3$ *Esto no podría pasar si la variable aleatoria tuviera distribución exponencial, dado que goza de la propiedad de "falta de memoria":* $P(X > t+s / X > t) = P(X > s)$ *Para todo s y t positivos. Por lo tanto no puede tener distribución exponencial*

Tabla 2. Resolución correcta del Caso 4.

Resolución incorrecta: *X: "años de vida de un componente nuevo". Y: "años de vida de un componente usado". Z: "años de vida de un componente"* *Del enunciado se desprende:* $P(X > 5) = 0{,}5$ *y que* $P(Y > 5) = 0{,}3$ *per no se puede determinar la distribución de Z.*

Tabla 3. Resolución incorrecta del Caso 4.

En este ejercicio se pretende que apliquen la propiedad llamada de "falta de memoria" inherente a la distribución exponencial, entre otras. Para resolverlo correctamente (como se observa en la Tabla 2), tendrían que ser capaces, además, de comprender que se utiliza una sola variable aleatoria para resolver el problema y que el comportamiento de todos los componentes está descripto por una única función de densidad de probabilidad y no por tres variables aleatorias distintas (como se observa en la Tabla 3).

Caso 5:

Suponga que ciertas chapas de aluminio tienen un peso que es una variable aleatoria con media de media tonelada y desvío típico 40 kg. ¿Puede decir qué proporción de chapas pesan menos de 500 kg.?

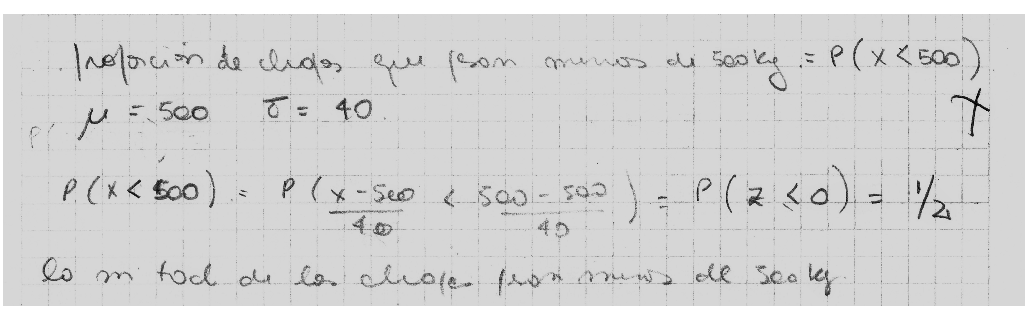

Figura 1. Resolución incorrecta del Caso 5.

En la Figura 1 se observa la resolución del problema planteado por parte de un alumno, donde para resolverlo asume que la distribución de la variable aleatoria continua tiene distribución Normal. Simplemente porque se les da como dato la media y el desvío estándar, cuando en realidad la distribución es desconocida y el ejercicio no es posible resolverlo. Esta forma mecánica de resolución se observó en el 80% de las producciones de los alumnos en evaluaciones diagnósticas (sobre un total de 50 alumnos evaluados). En la Figura 2 se muestra un caso de resolución correcta del ejercicio por parte de un alumno del curso.

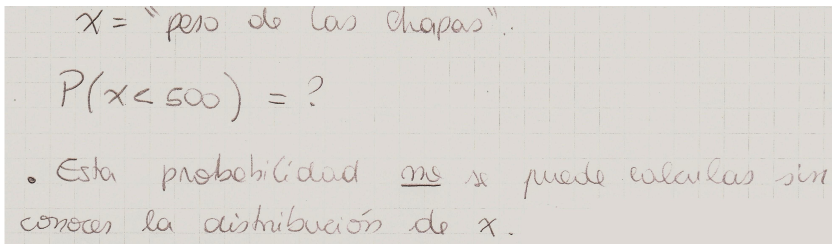

Figura 2. Resolución correcta del Caso 5.

Caso 6:

El tiempo que los alumnos tardan en entregar un examen cuyo límite de tiempo es de tres horas es una variable aleatoria *X,* medida en hora o fracción, con función de distribución acumulada $F(x) = (x/3)^3$ para $0 < x < 3$.

¿Qué porcentaje de alumnos entregan durante las primeras dos horas?

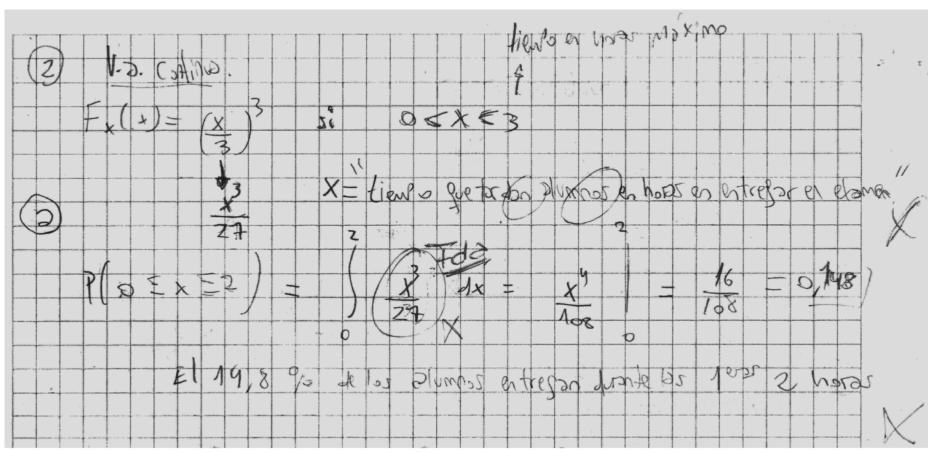

Figura 3. Resolución incorrecta del Caso 6.

En la Figura 3 se observa una típica resolución mecánica del ejercicio (Caso 6), por parte de un alumno de un curso en una evaluación diagnóstica. El alumno integra la distribución acumulada de la variable aleatoria en lugar de evaluar la misma en los extremos del intervalo.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado algunas de las problemáticas que presentan los alumnos cuando resuelven situaciones estándar relacionadas con el uso de variables aleatorias continuas en los cursos de Probabilidades de la Facultad de Ingeniería de la UNLP. Una de las dificultades observadas en los alumnos parte ya desde el planteo del problema y en la determinación del fenómeno aleatorio, ya que no pueden precisar qué está significando la variable aleatoria asociada al experimento (caso 2 y caso 3). Es decir, no alcanzan a identificar la variable aleatoria correcta. Otra dificultad observada es una tendencia a resolver los ejercicios en forma mecánica y descontextualizada (caso 5, caso 6). Para los casos 1 y 4 la problemática podría radicar en el hecho de que los alumnos no interpretan correctamente el significado del objeto matemático "función de densidad de probabilidad" (parecería que no logran hacer una conexión entre la realidad y dicho concepto).

Varias de estas dificultades han sido reportadas en las distintas publicaciones indicadas previamente. Los libros analizados conforman una muestra de una posible interpretación propuesta por los distintos autores para el concepto de función de densidad de probabilidad. Meyer (1992) y Maronna (1995) proponen una interpretación teórica, mientras que Devore (2008) y Montgomery y Runger (2006) proponen una interpretación intuitiva a partir de una aplicación para un problema concreto (vincula conceptos de estadística y probabilidad).Lo que se observa en general es que pese a que alguna bibliografía analizada hace hincapié en la vinculación entre la definición de histograma y la de función de densidad de probabilidad no proponen situaciones problemáticas en las que el alumno realice esta asociación. También se puede resaltar que algunos de los libros analizados desarrollan el concepto de histograma en capítulos posteriores al de función de densidad de probabilidad, con lo cual la interpretación es más abstracta.

Dado que estos estudiantes luego desarrollarán su actividad profesional usando los conceptos de probabilidades y estadística, en general, como herramienta aplicada a situaciones reales, y en vista de los resultados obtenidos, una tarea primordial sería crear espacios en los que el alumno se enfrente en su recorrido de estudio con problemas abiertos y contextualizados, situaciones que permitan al estudiante recrear un experimento aleatorio e identificar los resultados coherentes con dicho experimento. Luego que pueda inferir una determinada función de densidad a partir de la correcta modelización de la variable estadística y la aplicación de herramientas de estadística descriptiva.

La siguiente etapa de esta investigación consistirá en la elaboración, diseño y aplicación de los *dispositivos didácticos* denominados Actividades de Estudio e Investigación (AEI), mencionados anteriormente en este trabajo, de modo de hacer frente a las problemáticas planteadas. Esto constituye la respuesta de la TAD al problema de la *desarticulación,* del *monumentalismo de los saberes* y de la *falta de sentido* de la enseñanza de la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behar Gutierrez R., y Grima Cintas P. (2013). El histograma como un instrumento para la comprensión de las funciones de densidad de probabilidad. *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (229-235). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr Consultado el: 10/08/2015.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En Ruiz Higueras, L.; Estepa, A.; Garcia, F. J. (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (705-746). Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. Texte préparatoire à la *regular lecture qui sera donnée dans le cadre du congrès ICME-12* (Séoul, 8-15 juillet). Disponible en: http://www.icme12.org/upload/submission/1985_F.pdf Consultado el 12/08/2015

Devore, Jay L. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* Séptima edición. México: Cengage Learning.

Hawkins, A., Joliffe, F. y Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts.* Essex: Longman.

Huck, S., Cross, T. L.; Clark, S. B. (1986). Overcoming misconceptions about z-scores. *Teaching Statistics,* 8 (2), 38-40.

Maronna, R.A. (1995). *Probabilidad y Estadística Elementales para estudiantes de ciencias.* La Plata: Exacta.

Meyer, P.L. (1992). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas.* Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

Montgomery, D.C.; Runger G.C. (2006). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería.* México: Limusa Wiley.

Nardecchia, G.; Hevia, H. (2003). Dificultades en la enseñanza del concepto de variable aleatoria. Trabajo presentado en el *V Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy, Argentina.

Otero, M.R.; Fanaro, M.; Llanos, V.C. (2013). La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. *Rev. electrón. investig. educ. cienc.*, Tandil, 8 (1). Disponible en: http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662013000100007 Consultado el: 10/08/2015../../../../../../../../Julio/Downloads/%3chttp:/www.scielo.org.ar/scielo.php%3fscript=sci_arttext&pid=S1850-66662013000100 007&lng=es&nrm=iso%3e

Ruiz, B.R.; Albert J.A. (2005). El Caso de la Variable Aleatoria. *Acta Latinoamericana de matemática educativa,* 18.

Ruiz, B.R. (2006). *Un Acercamiento Cognitivo y Epistemológico a la Didáctica del Concepto de Variable Aleatoria,* Tesis de Maestra en Ciencias en Matemática Educativa. Mexico

Wilensky, U. (1995). Learning probability through building computational models. En D. Carraher y L. Meira (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference,* vol. 3, 152-159. Recife, Brazil: PME.